

Analyse fonctionnelle

1) Espaces L^p

Soit (X, μ) mesurée

Soit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty]$

définition Soit $1 \leq p < \infty$ réel

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{ f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : f \text{ mesurable et } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mu) = \left\{ f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : f \text{ mesurable et } \sup_{\text{ess}} |f| < \infty \right\}$$

où $\sup_{\text{ess}} |f| = \inf \{ A \geq 0 : |f| \leq A \text{ } \mu\text{-p.p.} \}$

Notations 1) si $1 \leq p < \infty$ si $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$

on note $f \sim g$ si $f = g$ μ -p.p.
(relation d'équivalence)

$$2) \text{ et } L^p(X, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mu) / \sim$$

3) si $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable, on pose

$$\forall 1 \leq p < \infty \quad \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{\text{ess}} |f| \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Proposition: $\forall 1 \leq p < \infty, \forall f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu),$
 $f \sim g \Rightarrow \|f\|_p = \|g\|_p$

(exo)

2) Inégalité de Minkowski

Théorème

$\forall 1 \leq p < \infty, \forall f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurables

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

démo. (so $p < \infty$)

Lemme: si $p, q \geq 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

alors $\forall x, y \geq 0, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

démo: $\ln$ concave $\rightarrow \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \leq \frac{1}{p} \ln(x^p) + \frac{1}{q} \ln(y^q)$
 $= \ln(xy)$ $\square$

lemme $\Rightarrow$ $\boxed{\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q}$

En effet: $\int_X |fg| d\mu \leq A^p \int_X \frac{|f|^p}{p} d\mu + \frac{1}{A^q} \int_X \frac{|g|^q}{q} d\mu$

car $fg = A f \frac{g}{A}$

Soit A tq $\int_X \frac{|f|^p}{p} d\mu = \int_X \frac{|g|^q}{q} d\mu$

$A^p \|f\|_p^p = \frac{\|g\|_q^q}{A^q} \quad (\Leftrightarrow A^{p+q} = \frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p})$

Pour ce A : $\int_X |fg| d\mu \leq A^p \|f\|_p^p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$

$= A^p \|f\|_p^p$

$= \left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{p}{p+q}} \|f\|_p^p$

$= \|g\|_q^{\frac{pq}{p+q}} \|f\|_p^{p - \frac{p^2}{p+q}}$

$= \|g\|_q^{\frac{pq}{p+q}} \|f\|_p^{\frac{pq}{p+q}} = \|f\|_p \|g\|_q$

or $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow pq = p+q$

(Hölder)

(reprise) démo du théorème. or q tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow p+q = pq \Leftrightarrow (p-1)q = p$

$\|f+g\|_p^p = \int_X |f+g|^p d\mu \leq \int_X |f+g|^{p-1} |f| d\mu + \int_X |f+g|^{p-1} |g| d\mu$
 $\leq \|f\|_p \|f+g\|_q^{p-1} + \|g\|_q \|f+g\|_q^{p-1}$

or $|f+g|^{(p-1)q} = |f+g|^p$

donc $\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1/q} + \|g\|_q \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1/q}$

$\Rightarrow \|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{p/q} (\|f\|_p + \|g\|_q)$

$$\Rightarrow \|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Remarques 1) $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(X, \mu)$ ($\forall 1 \leq p \leq \infty$)

2) Si $\mu(X) < \infty$, alors
 $\forall 1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $L^\infty(X, \mu) \subseteq L^{p_2}(X, \mu) \subseteq L^{p_1}(X, \mu) \subseteq L^1(X, \mu)$
 (si $|f(x)| \geq 1$, $|f(x)|^{p_2} \geq |f(x)|^{p_1}$)

Si $X = \mathbb{N}$ et $\mu =$ dénombrement

Dans ce cas :

$$L^p(\mathbb{N}, \mu) = l^p(\mathbb{N})$$

$$= \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < \infty\}$$

$$(\mu(F) = |F| \quad (\forall F \subset \mathbb{N}))$$

et $\forall 1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $l^1(\mathbb{N}) \subseteq l^{p_1}(\mathbb{N}) \subseteq l^{p_2}(\mathbb{N}) \subseteq l^\infty(\mathbb{N})$.

suite le jeudi 29/1.
 (de 14h à 15h).