Analyse fonctionnelle

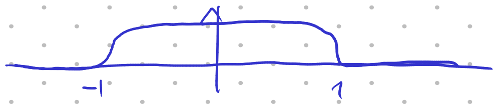
$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Définition Un noyau régularisant est une fonction $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^∞ tq

1) $\forall x, \rho(x) \geq 0$
2) $\forall |x| \geq R, \rho(x) = 0$
3) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$

Si $R = 1$: noyau régularisant standard

ex si $n = 1$



Existence $\zeta(x) = \begin{cases} \exp \frac{-1}{1-|x|^2} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$

ζ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, $\rho(x) = \dfrac{\zeta(\frac{x}{R})}{\int_{\mathbb{R}^n} \zeta(\frac{t}{R}) dt}$ noyau régularisant

Notation $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $C_c^k(\Omega, \mathbb{R}) = \{ f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}) : \exists K \subset \Omega$ compact, $\forall x \in \Omega \setminus K, f(x) = 0 \}$

Proposition Soit $1 \leq p \leq \infty$, soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ Si $\varphi \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^n)$, ALORS :

1) $f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x-y) dy$
est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$
2) $f * \varphi$ est $\mathcal{C}^k$ sur Ω
3) $\forall\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$, $\partial^\alpha (f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi$ où $\partial^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$

démo. 1) $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\varphi(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)\varphi(x-y)| dy$

$\forall y \notin x - K$, $\varphi(x-y) = 0$

donc $|f(y)\varphi(x-y)| = \chi_{x-K}(y) |f(y)\varphi(x-y)|$

donc $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\varphi(y)| dy \leq \|\varphi\|_\infty \|\chi_{x-K}(y) f(y)\|_{L^1}$

$\underset{\text{Young}}{\leq} \underbrace{\|\varphi\|_\infty \|f\|_{L^p}}_{<\infty} \underbrace{\|\chi_{x-K}\|_{L^q}}_{<\infty}$ si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ car $x - K$ compact. $\square$

2) $f*\varphi$ est $\mathcal{C}^0$ Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Soit $B(x_0,R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| < R\}$

$$f*\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x-y)\,dy$$

or $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto f(y)\varphi(x-y)$ continue sur $B(x_0,1)$

Soit r tq $\forall |t| \geq r$, $\varphi(t) = 0$

$R = r + |x_0| + 1$

$|y| > R \Rightarrow |x-y| \geq |y| - |x-x_0| - |x_0|$

$> r+1-|x-x_0| > r \quad \forall x \in B(x_0,1)$

$\Rightarrow \varphi(x-y) = 0$

donc $\forall x \in B(x_0,1)$, $f(y)\varphi(x-y) = f(y)\varphi(x-y)\chi_{B(0,R)}(y)$

donc $|f(y)\varphi(x-y)| \leq \underbrace{|f(y)|\,\|\varphi\|_\infty \chi_{B(0,R)}(y)}_{\text{ne dépend pas de } x}$

et $\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\chi_{B(0,R)}(y)\,dy \leq \|f\|_{L^p} \|\chi_{B(0,R)}\|_{L^q} < \infty$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$

donc par le théorème de continuité sous l'intégrale

$x \longmapsto f*\varphi(x)$ continue.

de même $x \longmapsto f*\varphi(x)$ C^k.

Théorème. Soit $\rho \geq 0$, $\forall |x| \geq 1$, $\rho(x) = 0$, ρ C^∞ et $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$

$\forall \varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

Alors $\forall 1 \leq p < \infty$, $\forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \|\rho_\varepsilon * f - f\|_{L^p} = 0$

$\square$

Corollaire : $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$

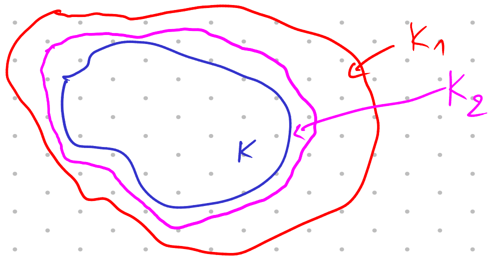
contre-ex du corollaire si $p = \infty$: si $f = \chi_{\mathbb{R}_+}$ alors $\forall h \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$\|h - f\|_\infty \geq 1$

<u>démo</u> Si $f = \chi_K$ K compact $\subset \mathbb{R}^n$.

$f - \rho_\varepsilon * f = \chi_K - \rho_\varepsilon * \chi_K$

$\rho_\varepsilon * \chi_K(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)\chi_K(x-y)\,dy = \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)\chi_K(x-y)\,dy$



$$K_j = \{x \in \mathbb{R}^n,\ d(x,K) \leq \tfrac{1}{j}\}$$

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \dots$$

$$K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$$

si $0 < \varepsilon < \frac{1}{j}$ alors $\forall x \in K$, $\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\chi_K(x)}} = \chi_{K_j} * \rho_\varepsilon(x)$

$$\shortparallel$$

$$\int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)\,\chi_{K_j}(x-y)\,dy = \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)\,dy = 1$$

Or $x \in K$, $|y| < \varepsilon \Rightarrow d(x-y, K) \leq |x-y-x| = |y| < \varepsilon < \frac{1}{j} \Rightarrow x-y \in K_j$

Donc $\chi_K - \rho_\varepsilon * \chi_K = \chi_{K_j} * \rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon * \chi_K$ si $x \in K$

$= (\chi_{K_j} - \chi_K) * \rho_\varepsilon$ si $x \in K$.

si $x \notin K_j$, $(\chi_K - \rho_\varepsilon * \chi_K)(x) = -\int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)\,\underbrace{\chi_K(x-y)}_{0}\,dy = 0$

en $0 < \varepsilon < \frac{1}{j}$, $|y| < \varepsilon$, $x-y \in K \Rightarrow d(x,K) \leq |x-(x-y)| = |y| < \varepsilon < \frac{1}{j}$

$\Rightarrow x \in K_j$ absurde

$$(\chi_K - \rho_\varepsilon * \chi_K)(x) = \begin{cases} \chi_{K_j \setminus K} * \rho_\varepsilon(x) & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{si } x \notin K_j \\ -\rho_\varepsilon * \chi_K(x) & \text{si } x \in K_j \setminus K \end{cases}$$

donc $\chi_K - \rho_\varepsilon * \chi_K = \chi_K \cdot \chi_{K_j - K} * \rho_\varepsilon + \chi_{K_j - K} \cdot (-\rho_\varepsilon * \chi_K)$

$$\|\chi_K - \rho_\varepsilon * \chi_K\|_{L^1} \leq \underbrace{\|\chi_{K_j - K} * \rho_\varepsilon\|_{L^1}}_{\|\rho_\varepsilon\|_{L^1}\, \nu(K_j - K)} + \|\chi_{K_j - K} \cdot (\rho_\varepsilon * \chi_K)\|_{L^1}$$

$$+ \quad \nu(K_j - K)\,\|\rho_\varepsilon\|_{L^1}$$

$\leq 2\,\nu(K_j - K)$ si $0 < \varepsilon < \frac{1}{j}$

Or $\lim_{j \to \infty} \nu(K_j - K) = 0$

Donc si $\eta > 0$. Soit j tq $\nu(K_j - K) < \eta$

alors $\forall\, 0 < \varepsilon < \frac{1}{j}$ $\|\chi_K - \rho_\varepsilon * \chi_K\|_{L^1} < 2\eta$ $\square$

FIN