Calcul différentiel

1) Théorème d'inversion locale

Théorème Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert

on suppose $f : U \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$

et que $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isomorphisme pour un $a \in U$

Alors $\exists$ $a \in U' \subset U$ ouvert et $V' \ni f(a)$ ouvert,

$f : U' \to V'$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme (*)

(*) **Définition:** $\underset{\mathbb{R}^n}{f : U} \to \underset{\mathbb{R}^n}{V}$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme si f $\mathcal{C}^1$, bijective et $f^{-1} : V \to U$ est aussi $\mathcal{C}^1$.

2) Théorème d'inversion globale

Théorème : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$

tq $\forall a \in U$, $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isomorphisme

et tq f injective. Alors $f(U)$ ouvert et $f : U \to f(U)$ $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme

Contre-ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ est $\mathcal{C}^1$, bijective mais f^{-1} n'est pas $\mathcal{C}^1$

ex : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto \exp(M)$

est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme local en $M = 0$:

$$D\exp|_0 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ H \mapsto H \quad = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

$$\exp(H) = I_n + H + o(\|H\|)$$

Mais exp non injective (par ex $\exp\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2$.)

En revanche : $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
(symétriques) (symétriques définies positives)
$M \mapsto e^M$

$\mathcal{C}^1$ difféomorphisme car exp injectif et $D\exp|_M : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $H \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell_{k,M}(H)}{k!}$

où $\ell_{k,M}(H) = M^{k-1}H + M^{k-2}HM + \dots + HM^{k-1}$

isomorphisme.

$$\overbrace{x^2-y^2}^{f_1},\ \overbrace{2xy}^{f_2}$$

Exercice 1. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et soit f définie sur U par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.

Solution. f $\mathcal{C}^1$

$$\operatorname{Jac} f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$\det \operatorname{Jac} f(x,y) = 4(x^2+y^2) > 0 \quad (\forall (x,y) \neq (0,0))$$

donc f $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme local en (x,y) $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$

Mais f non injectif car $f(x,y) = f(-x,-y)$

Ex des coordonnées polaires

$F : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

F est $\mathcal{C}^1$, différentiable et $\forall r,\theta \leadsto \operatorname{Jac}(F)_{r,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

$$\det \operatorname{Jac}(F)_{r,\theta} = r \neq 0$$

donc $\forall r,\theta$, $DF(r,\theta) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isomorphisme.

De plus F injective et $F(\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[) = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\}$

donc théo d'inversion globale $\Rightarrow$ F $\mathcal{C}^1$ difféo : $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\}$

Remarque : si F $\mathcal{C}^1$ difféo local en a, alors $DF^{-1}(F(a)) = DF(a)^{-1}$

[car $F \circ F^{-1} = Id \Rightarrow DF|_{F^{-1}(F(a))} \circ DF^{-1}_{(F(a))} = Id$]

Cas où $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $\quad F^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\operatorname{Arctan} \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Rem.
$$\operatorname{Jac} F^{-1}_{(x,y)} = \left(\operatorname{Jac} F_{(r,\theta)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\Rightarrow \quad \partial_x \sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta$$

$$\partial_x\left(2\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) = \frac{-\sin\theta}{r} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$\vdots$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\sin(y/2) - x, \sin(x/2) - y)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer sa différentielle en tout point et vérifier qu'elle est inversible.
2. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$. Justifier que $f(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f^{-1} est lipschitzienne (on travaillera avec la norme 1 de $\mathbb{R}^2$).
4. En déduire que f est difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
5. Calculer $Df^{-1}(p)$ où $p = (1 - \pi/2, \sqrt{2}/2 - \pi)$.

1) $\operatorname{Jac} f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2}\cos(y/2) \\ \frac{1}{2}\cos(\frac{x}{2}) & -1 \end{pmatrix}$

$\det(\operatorname{Jac} f(x,y)) = 1 - \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\cos y/2 > 0$

2) f injective : $f(x,y) = f(x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y/2 - x = \sin\frac{y'}{2} - x' \\ \sin x/2 - y = \sin\frac{x'}{2} - y' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x' = \sin(\frac{y}{2}) - \sin(\frac{y'}{2}) \\ y - y' = \sin(\frac{x}{2}) - \sin(\frac{x'}{2}) \end{cases}$

Théorème des accroissements finis $\Rightarrow \begin{cases} |x-x'| \leq \frac{1}{2}|y-y'| \\ |y-y'| \leq \frac{|x-x'|}{2} \end{cases} \Rightarrow |x-x'| \leq \frac{|x-x'|}{4} \Rightarrow x = x'$

et $y = y'$ □

Donc théorème d'inversion globale $\Rightarrow f(\mathbb{R}^2)$ ouvert et $f : \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2)$ difféo.

4) f surjective Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = (a,b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\frac{y}{2}) - x = a \\ \sin(\frac{x}{2}) - y = b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin(\frac{y}{2}) - a \\ y = \sin(\frac{x}{2}) - b \end{cases}$ $\qquad \|(u,v)\| = \max\{|u|, |v|\}$

On pose $H(x,y) = (\sin(y/2) - a, \sin(\frac{x}{2}) - b)$

$\|H(x,y) - H(x',y')\| \leqslant \frac{1}{2}\|(x,y) - (x',y')\|$

Théorème du point fixe. $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ H(x,y) = (x,y)$.

Pause 5'.