Université Claude Bernard — Licence de Mathématiques, L3

PROBABILITÉS

Feuille de TD 3

Indépendance (suite), variables à densité

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Exercice 1.

1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Explicitez la loi de $\frac{1}{U}$ et celle de U^2.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres $a > 0$ et $b > 0$ respectivement :
$$\mathbf{P}_X(dx) = ae^{-ax}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)dx, \quad \mathbf{P}_Y(dx) = be^{-bx}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)dx.$$
Explicitez la loi de $\frac{X}{Y}$.

Exercice 2. Soient U, V deux variables indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Donner la loi de e^U et de UV.

Exercice 3. Partiel Mars 2015

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Calculer la loi de la variable $\frac{X}{Y}$.
2. En déduire la loi de T^{-1} si T est une variable aléatoire de loi de Cauchy. (Une v.a. X est de loi de Cauchy si sa loi admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$).
3. Déterminer la loi de $Z = X^2 + Y^2$.

Exercice 4. Lois Gamma, Exponentielle et Gaussienne

Une variable aléatoire X suit une *loi gamma de paramètres* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$, notée $\Gamma(\alpha, \beta)$, si elle admet une densité sur $\mathbb{R}_*^+$ de la forme $f(x) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$, et $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$.

1. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ et en déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
2. Vérifier que, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$, f est bien une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$. Quelle loi reconnaissez-vous lorsque α est égale à 1 ?
3. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(\alpha_1, \beta)$ et $\Gamma(\alpha_2, \beta)$. Calculer la loi de (U, V), où $U = X + Y$ et $V = X/(X+Y)$ sont deux variables aléatoires indépendantes, et déterminer la loi de U.
5. Calculer, pour $t < \beta$, $\psi(t) = \mathbf{E}(e^{tX})$.
6. Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont des v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Quelle est la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$?
   (b) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On définit $N_t := |\{k \geq 1 : \sum_{i=1}^k X_i \in [0,t]\}|$. Calculer la loi de N_t.
7. Soit Y une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que Y^2 est de loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (On pourra utiliser la relation $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$).
8. Soit $Y_1, \ldots, Y_n$ n v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Quelle est la loi de $Z = \sum_{i=1}^n Y_i^2$? Calculer $\mathbf{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$.