Feuille de TD 1

Lois, théorème de transfert

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Exercice 1. Espérance

Soit $X : \Omega \longrightarrow \{-2, 1\}$ une v.a. de loi $\mathbf{P}_X = (1/3)\delta_{-2} + (2/3)\delta_1$.

1. Calculer $\mathbf{E}(|X|)$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbf{E}(X^n)$ existe et calculer sa valeur.
3. Soit $n \geq 1$ un entier fixé, on note $Y = X^n + 1$. Déterminer la loi de Y. En déduire $\mathbf{E}(Y^2)$.

Exercice 2. Lois uniformes

Soit $U : \Omega \longrightarrow [a, b]$ une variable aléatoire de loi $\mathbf{P}_U(\mathrm{d}x) = \alpha \mathbf{1}_{[a,b]}\mathrm{d}x$ pour un certain $\alpha > 0$, où $\mathrm{d}x$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On dit que U a pour loi la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.

1. Calculer α.
2. Calculer l'espérance et la variance de U.

Exercice 3. Calcul d'une loi

Soit $U : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ de loi uniforme (c'est-à-dire que $\mathbf{P}_U$ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$). Donnez la loi de la v.a. $X = (-2) \times \mathbf{1}_{[0,1/3]}(U) + \mathbf{1}_{]1/3,1]}(U)$.

Exercice 4. Espérances et variances des lois usuelles

Dans chacun des cas suivants, vérifier qu'on définit bien une variable aléatoire X, et calculer son espérance et sa variance.

1. Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$:
$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) = p,$$
2. Binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}, p \in [0, 1]$:
$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n,$$
3. Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$:
$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbf{N}$$
4. Géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$:
$$\mathbf{P}(X = n) = p(1 - p)^n, \quad n \in \mathbf{N},$$
5. Exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\mathbf{P}_X(dx) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}\lambda e^{-\lambda x}dx.$$

Exercice 5. Espérance d'une loi

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathbf{P}_X(\mathrm{d}x) = \alpha\, x^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x$.

1. Calculer α.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\mathbf{E}(X^n)$.

Exercice 6. Loi géométrique

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Calculer la probabilité que X soit paire.
2. Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{E}(e^{-tX})$.
3. On pose
$$Z = |\cos(\pi X/2)|.(X/2)$$
Déterminer la loi de Z et calculer $\mathbf{E}(Z)$.

Exercice 7. Intégrabilité

Soit Z une variable aléatoire positive.

1. On suppose que Z est à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que $\mathbf{E}(Z) = \sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(Z \geq n)$.
2. On ne suppose plus que Z est à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que
$$\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(Z \geq n) \leq \mathbf{E}(Z) \leq 1 + \sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(Z \geq n).$$
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que Z soit intégrable.