

Deuxième session – Durée 120 min –

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses et **les réponses doivent être justifiées**.

Le barème est donné à titre indicatif et peut évoluer.

Exercice 1 (Question de cours (4 pts.)).

1. Énoncer les deux lemmes de Borel-Cantelli.
2. Énoncer le théorème de Paul Lévy.

Exercice 2. (4 pts.) Soient X et Z deux variables aléatoires réelles et indépendantes. On suppose que X suit un loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ et $Z \in \{0, 1\}$, avec

$$P(Z = 1) = P(Z = -1) = \frac{1}{2}.$$

Posons $Y = XZ$.

1. Calculer la loi de la variable aléatoire Y .
2. Calculer $Cov(X, Y)$.
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
4. Le couple (X, Y) est-il un vecteur gaussien ?

Exercice 3. (4 pts.) On considère $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi gaussienne centrée réduite, $\mathcal{N}(0, 1)$. On rappelle que la fonction caractéristique d'une loi gaussienne est pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\varphi(t) = \exp(-\frac{t^2}{2})$.

1. Donner la loi de la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
2. Soit K une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, c'est-à-dire, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a $P(K = k) = (1 - p)^{k-1}p$.

On suppose que K est indépendante de la suite $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ et on note

$$Y = \sum_{i=1}^K X_i$$

Calculer la fonction caractéristique de Y .

Exercice 4. (9 pts.) On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi de Paréto de paramètre $a > 0$ si sa fonction de répartition est donnée par $F_X(t) = (1 - \frac{1}{t^a})\mathbf{1}_{[1, \infty[}(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$. On considère $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi de Paréto de paramètre $a > 0$.

1. (a) Montrer que X_1 est une variable à densité et calculer sa densité.
(b) Pour quelles valeurs de $a > 0$, X_1 admet-elle une espérance ?
(c) On suppose $a > 1$. Montrer que la suite $\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge presque sûrement et donner sa limite.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on note

$$M_n = \max_{i=1, \dots, n} X_i.$$

- (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer la loi de M_n (on donnera sa densité).

(b) Montrer que pour tout $N \in \mathbf{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_i \geq N) = +\infty.$$

(c) En déduire que la suite $(M_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge presque sûrement vers $+\infty$.

3. (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, calculer la fonction de répartition de $n^{-1/a} M_n$. On la note F_n .

(b) En utilisant F_n , montrer que la suite $(n^{-1/a} M_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une limite Y que l'on déterminera.

(c) Montrer que Y admet une densité et calculez la.