

Correction de la deuxième session – Durée 120 min –

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses et **les réponses doivent être justifiées**.
Le barème est donné à titre indicatif et peut évoluer.

Exercice 1 (Question de cours (4 pts.)).

1. Énoncer les deux lemmes de Borel-Cantelli.
2. Énoncer le théorème de Paul Lévy.

Exercice 2. (4 pts.) Soient X et Z deux variables aléatoires réelles et indépendantes. On suppose que X suit un loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ et $Z \in \{0, 1\}$, avec

$$P(Z = 1) = P(Z = -1) = \frac{1}{2}.$$

Posons $Y = XZ$.

1. Calculer la loi de la variable aléatoire Y .

On calcule la fonction caractéristique φ_Y de Y . Par indépendance entre X et Z , on trouve

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY}] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[e^{itX}] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[e^{-itX}] = \frac{1}{2}(\varphi_X(t) + \varphi_X(-t)) = \phi_X(t),$$

car $\varphi_X(t)$ est symétrique. Comme la fonction caractéristique caractérise la loi, on en déduit que Y a même loi que X .

2. Calculer $Cov(X, Y)$.

Comme X et Y sont centrées, $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2Z] = \mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[Z] = 0$, par indépendance entre X et Z .

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Non, car $\mathbb{P}(|X| \leq 1, |Y| > 1) = 0 \neq \mathbb{P}(|X| \leq 1) \cdot \mathbb{P}(|Y| > 1)$.

4. Le couple (X, Y) est-il un vecteur gaussien?

Non, car $\mathbb{P}(X + Y = 0) = 1/2$, donc $X + Y$ n'est pas une variable gaussienne.

Exercice 3. (4 pts.) On considère $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi gaussienne centrée réduite, $\mathcal{N}(0, 1)$. On rappelle que la fonction caractéristique d'une loi gaussienne est pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \exp(-\frac{t^2}{2})$.

1. Donner la loi de la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

On a $\varphi_{S_n}(t) = \varphi(t)^n = \exp(-\frac{nt^2}{2})$, donc S_n suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, n)$.

2. Soit K une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, c'est-à-dire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P(K = k) = (1 - p)^{k-1}p$.

On suppose que K est indépendante de la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et on note

$$Y = \sum_{i=1}^K X_i$$

Calculer la fonction caractéristique de Y .

Par indépendance entre K et les X_i , on trouve

$$\phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{it \sum_{i=1}^K X_i}] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(K = k) \mathbb{E}[e^{it \sum_{i=1}^k X_i}] = p \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} \varphi(t)^k = \frac{p\varphi(t)}{1 - (1 - p)\varphi(t)}.$$

Exercice 4. (9 pts.) On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi de Paréto de paramètre $a > 0$ si sa fonction de répartition est donnée par $F_X(t) = (1 - \frac{1}{t^a})\mathbf{1}_{[1, \infty[}(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$. On considère $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi de Paréto de paramètre $a > 0$.

1. (a) Montrer que X_1 est une variable à densité et calculer sa densité.

La fonction de répartition est C^1 sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ et continue sur $\mathbf{R}$, c'est donc une variable à densité, dont la densité est donnée par

$$f_X(t) = F'_X(t) = \frac{a}{t^{a+1}}\mathbf{1}_{\{t \geq 1\}}.$$

- (b) Pour quelles valeurs de $a > 0$, X_1 admet-elle une espérance ?

La loi de Pareto prend des valeurs positives p.s., son espérance est toujours bien définie. Cette dernière est finie si

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^{+\infty} \frac{ta}{t^{a+1}} dt < \infty,$$

ce qui n'est vrai que si $a > 1$ pour que l'intégrale converge en $+\infty$.

- (c) On suppose $a > 1$. Montrer que la suite $\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge presque sûrement et donner sa limite.

Pour $a > 1$, l'espérance de la loi de Pareto est finie, la suite converge, par loi forte des grands nombres, vers

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^{+\infty} \frac{a}{t^a} dt = \frac{a}{a-1},$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on note

$$M_n = \max_{i=1, \dots, n} X_i.$$

- (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer la loi de M_n (on donnera sa densité). On calcule la fonction de répartition, par indépendance des variables,

$$F_{M_n}(t) := \mathbb{P}(M_n \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t)^n = (1 - \frac{1}{t^a})^n \mathbf{1}_{\{t \geq 1\}},$$

qui est elle aussi C^1 par morceaux, par conséquent la densité est donnée par

$$F'_{M_n}(t) = \frac{na}{t^{a+1}} (1 - \frac{1}{t^a})^{n-1} \mathbf{1}_{\{t \geq 1\}}.$$

- (b) Montrer que pour tout $N \in \mathbf{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_i \geq N) = +\infty.$$

Pour tout $N \in \mathbf{R}$, on a $P(X_i \geq N) = 1/N^a > 0$, les variables étant iid,

$$\sum_i^n P(X_i \geq N) = nP(X \geq N),$$

qui diverge quand $n \rightarrow \infty$

- (c) En déduire que la suite $(M_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge presque sûrement vers $+\infty$.

La suite M_n étant croissante, le complémentaire de l'événement $\{M_n \rightarrow \infty\}$ est $\{M_n \text{ reste borné}\} = \cup_{N \in \mathbf{N}} \{\sup_{i \in \mathbf{N}} X_i < N\}$. Toutefois, par Borel-Cantelli et la question précédente, les X_i étant indépendants, on sait que pour tout N p.s., une infinité de X_i sont plus grands que N , et donc en particulier pour tout $N \in \mathbf{N}$

$$P(\sup_{i \in \mathbf{N}} X_i < N) = 0.$$

L'union étant dénombrable, on en déduit que $P((M_n) \text{ reste bornée}) = 0$, ce qui montre le résultat.

3. (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, calculer la fonction de répartition de $n^{-1/a}M_n$. On la note F_n .
On écrit

$$F_n(t) = P(n^{-1/a}M_n \leq t) = (1 - \frac{1}{nt^a})^n \mathbf{1}_{\{t \geq n^{-1/a}\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(-1/t^a) \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}}$$

- (b) En utilisant F_n , montrer que la suite $(n^{-1/a}M_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une limite Y que l'on déterminera.

On utilise la convergence ponctuelle de la fonction de répartition, pour justifier que $n^{-1/a}M_n$ converge en loi vers une variable de fonction de répartition

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = \exp(-1/t^a) \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}}$$

- (c) Montrer que Y admet une densité et calculez la.

Cette fonction de répartition est C^1 par morceaux et continue, on la dérive pour trouver la densité

$$f_Y(t) = F'_Y(t) = \frac{a}{t^{a+1}} \exp(-1/t^a) \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}}.$$