Université Claude Bernard Lyon 1 UE de probabilités L3
Semestre de printemps 2025-2026

Examen – Durée 90 min – le 11 mars 2026

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses et **les réponses doivent être justifiées.**

Exercice 1 (Question de cours)**.**

1. Énoncer les deux Lemmes de Borel-Cantelli
2. Énoncer la loi forte des grands nombres dans L^1.

Exercice 2 (Minimum de variables exponentielles)**.**
Soit $(\lambda_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de réelles strictement positifs. Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, X_i est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre λ_i.

On rappelle que la densité, par rapport à la mesure de Lebesgue, d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est donnée par $x \mapsto \lambda 1_{[0,\infty[}(x)e^{-\lambda x}$. $\forall n \in \mathbf{N}^*$, on définit la variable aléatoire

$$Z_{(n)} = \min\{X_k, 1 \le k \le n\}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $t > 0$ calculer $\mathbf{P}(Z_{(n)} > t)$. En déduire la loi de $Z_{(n)}$, on donnera la densité de $Z_{(n)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. Pour tout $t > 0$, montrer l'identité suivante :
$$\mathbf{P}(X_2 \ge X_1 > t) = \int_t^{+\infty} \mathbf{P}(X_2 \ge x)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx. \tag{1}$$
3. On définit la variable aléatoire K telle que $Z_{(n)} = X_K$, c'est à dire l'indice qui réalise le minimum des variables $\{X_k, 1 \le k \le n\}$. Pour tout $t > 0$, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, en adaptant l'équation (1), calculer
$$\mathbf{P}(Z_{(n)} > t, K = k).$$
4. En déduire la loi de K, et indiquer si $Z_{(n)}$ et K sont indépendantes.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ pour que la suite $(Z_{(n)})_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.
6. Montrer que si $\forall t > 0$,
$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \exp(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t) < +\infty,$$
alors la suite $(Z_{(n)})_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0.

Exercice 3 (Calcul de Lois)**.**
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de densité (par rapport à la masure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$) $f(x) = \frac{1}{x^2} 1_{]1,\infty[}(x)$. On pose

$$(Z, W) = \left(\ln(X), 1 + \frac{\ln(Y)}{\ln(X)}\right).$$

1. Quelle est la loi de (Z, W) ? On pourra donner sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$.
2. Z et W sont elles indépendantes ?
3. Quelle est la loi de W ?