Université Claude Bernard Lyon 1 UE de probabilités L3

Semestre de printemps 2025-2026

Examen – Durée 120 min – le 5 mai 2026

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses et **les réponses doivent être justifiées.**

Le barème est donné à titre indicatif et peut évoluer.

Exercice 1 (Question de cours (**4 pts.**)).

1. Énoncer le TCL pour des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ dans L^2.
2. Est-ce qu'un processus de Galton-Watson dont la mesure de reproduction μ est donnée par
$$\mu = \frac{2}{3}\delta_0 + \frac{1}{6}\delta_2 + \frac{1}{6}\delta_4,$$
a une chance de survivre indéfiniment ? Justifier.

Exercice 2. (**6 pts.**) On considère la fonction réelle
$$u(x) = (1 + |x|)^{-1}.$$

1. Soit X une variable aléatoire réelle. On considère pour $n \geq 0$, $\theta_n = E(u(nX))$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \theta_n$.
2. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $0 < c < 1$. On note $X = \max(U - c, 0)$.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Calculer $E(X)$.
   (c) Pour cette variable X, montrer que
   $$\theta_n = c + \frac{\ln(1 + n(1 - c))}{n}.$$
   Est-ce cohérent avec la question 1 ?
   (d) Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ des v.a.r.i.i.d. de même loi que X. Pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, posons $Y_i = \ln(X_i + 1)$. Donner la loi de Y_1 et calculer $E(Y_1)$.
   (e) Montrer que la suite de variable aléatoire définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
   $$\left(\prod_{i=1}^{n}(X_i + 1)\right)^{1/n},$$
   converge presque sûrement vers une limite que l'on calculera.

Exercice 3. (**3 pts.**) Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbf{N}$. On rappelle que sa fonction génératrice est, pour tout $s \in [0, 1]$,
$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k.$$

1. On suppose que X est bornée. Exprimer $E(X)$ en fonction de G et montrer que
$$Var(X) = G''(1) + G'(1)(1 - G'(1)).$$
2. Soit $p \in [0, \frac{1}{2}]$ et X une v.a. dans $\{0, 1, 2\}$ telle que $P(X = 1) = P(X = 2) = p$. On note Z_n le nombre d'individus à la génération n d'un processus de Galton Watson où on suppose $Z_0 = 1$ et Z_1 a même loi que X.
   (a) Calculer $P(X = 0)$ et $E(X)$.
   (b) Quelle est la probabilité d'extinction du processus de branchement ?

Exercice 4. (3 pts.)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et de même loi. On suppose qu'elles sont dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qu'elles sont positives.

1. Montrer que la suite $\left(\frac{X_k}{k}\right)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\sum_{k\in\mathbf{N}^*} P\Big(\frac{X_k}{k} > \varepsilon\Big) < \infty.$$
3. En déduire
$$\lim_{k\to\infty} \frac{X_k}{k} = 0, \text{ p.s.}$$

Exercice 5. (6 pts.) Soit $T = (X, Y, Z)$ un vecteur gaussien *centré* dans $\mathbf{R}^3$ de matrice de covariances

$$\Gamma_T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Donner la loi de X^2.
2. Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$, donner la loi de la variable $W = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$. On donnera également l'espérance et la variance de W.
3. Le vecteur (X, Y, Z) admet-il une densité ?
4. On note $U = X - Y$ et $V = X + Y - 2Z$. Montrer que le vecteur (U, V) est un vecteur gaussien.
5. Calculer la matrice des covariances du vecteur gaussien (U, V).
6. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?