

Correction de l'examen du 5 mai 2026 (durée 120 min)

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses et **les réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 (Question de cours).

1. Énoncer le TCL pour des variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{R}^d dans L^2 .

Soit $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ des v.a.i.i.d à valeurs dans \mathbf{R}^d et dans L^2 . Alors la suite

$$\left(\sqrt{n} \left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - E(X_1) \right) \right)_{n \in \mathbf{N}}$$

converge en loi vers le vecteur gaussien $\mathcal{N}(0, \Gamma_{X_1})$ où Γ_{X_1} est la matrice des covariances de X_1 .

2. Est-ce qu'un processus de Galton-Watson dont la mesure de reproduction μ est donnée par

$$\mu = \frac{2}{3}\delta_0 + \frac{1}{6}\delta_2 + \frac{1}{6}\delta_4,$$

a une chance de survivre indéfiniment? Justifier.

L'espérance de μ est 1, la théorie des processus de Galton-Watson vu en cours montre que puisque $\mu \neq \delta_1$ alors la probabilité d'extinction est égale à 1.

Exercice 2. On considère la fonction réelle

$$u(x) = (1 + |x|)^{-1}.$$

1. Soit X une variable aléatoire réelle. On considère pour $n \geq 0$, $\theta_n = E(u(nX))$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$.

La suite $(|nX|)$ converge p.s. vers $+\infty$ si X n'est pas nulle et 0 si $X = 0$. Ainsi par le théorème de convergence dominée, on montre sans trop de difficulté que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = P(X = 0).$$

2. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $0 < c < 1$. On note $X = \max(U - c, 0)$.

- (a) Donner la loi de X .

Par un procédé classique, on montre

$$dP_X(x) = c\delta_0(x) + 1_{[0, 1-c]}(x)dx.$$

- (b) Calculer $E(X)$.

On a

$$E(X) = (1 - c)^2/2.$$

- (c) Pour cette variable X , calculer θ_n , puis sa limite quand n tend vers l'infini. Est-ce cohérent avec la question précédente?

Par la formule de transfert on a directement

$$\theta_n = c + \frac{\log(1 + n(1 - c))}{n}.$$

Ainsi on a bien directement que θ_n tend vers c lorsque n tend vers l'infini. Ouf, c'est bien cohérent avec ce qui précède.

- (d) Soit $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ des v.a.r.i.i.d. de même loi que X . Pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, posons $Y_i = \ln(X_i + 1)$. Donner la loi de Y_1 et calculer $E(Y_1)$.

Par un procédé classique, on montre

$$dP_Y(y) = c\delta_0(y) + 1_{[0, 2-c]}(y)e^y dy,$$

et donc on a par une intégration par parties :

$$E(Y_1) = \int_0^{\ln(2-c)} ye^y dy = (2-c)\ln(2-c) - 1 + c.$$

- (e) Montrer que la suite de variable aléatoire définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\left(\prod_{i=1}^n (X_i + 1) \right)^{1/n},$$

converge presque sûrement vers une limite que l'on calculera.

Prenons le logarithme de la suite en ayant remarqué que les termes sont tous strictement positifs. On obtient la suite

$$\left(\frac{1}{n} (Y_1 + \dots + Y_n) \right)$$

qui converge p.s., par la loi forte des grands nombre, vers $E(Y_1) = (2-c)\ln(2-c) - 2 + c$.

Ainsi, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^n (X_i + 1) \right)^{1/n} = \exp((2-c)\ln(2-c) - 1 + c).$$

Exercice 3. Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbf{N} . On rappelle que sa fonction génératrice est, pour tout $s \in [0, 1]$,

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k.$$

1. On suppose que X est bornée. Exprimer $E(X)$ en fonction de G et montrer que

$$\text{Var}(X) = G''(1) + G'(1)(1 - G'(1)).$$

On a vu dans le dernier chapitre du cours que $G(1) = 1$, $G'(1) = E(X)$ et $G''(1) = E(X^2) - E(X)$. Donc

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 = G''(1) + G'(1)(1 - G'(1)).$$

2. Soit $p \in [0, \frac{1}{2}]$ et X une v.a. dans $\{0, 1, 2\}$ telle que $P(X = 1) = P(X = 2) = p$. On note Z_n le nombre d'individus à la génération n d'un processus de Galton Watson où on suppose $Z_0 = 1$ et Z_1 a même loi que X .

- (a) Calculer $P(X = 0)$ et $E(X)$.

Puisque X est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ on a donc $P(X = 0) = 1 - 2p$ et $E(X) = 3p$.

- (b) Quelle est la probabilité d'extinction du processus de branchement ?

On cherche le plus petit point fixe de la fonction génératrice. Notons le ℓ et il doit vérifier l'équation

$$1 - 2p + \ell p + \ell^2 p = \ell.$$

Sachant que 1 est un point fixe a deuxième solution de l'équation est

$$\frac{1 - 2p}{p}.$$

Ainsi puisqu'on cherche le plus petit point fixe on a, si $p \in [1/3, 1/2]$ alors $\ell = \frac{1-2p}{p}$ et si $p \in [0, 1/3]$ alors $\ell = 1$.

Exercice 4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles de même loi. On suppose qu'elles sont dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qu'elles sont positives.

1. Montrer que la suite $\left(\frac{X_k}{k}\right)_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera.

Soit ϕ une fonction continue bornée, on a par la théorème de convergence dominée (vérifier les hypothèses)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\phi(X_k/k)) = \phi(0),$$

donc la suite converge en loi vers 0.

2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k \in \mathbf{N}^*} P\left(\frac{X_k}{k} > \varepsilon\right) < \infty.$$

Puisque les variables sont dans L^2 , alors par Markov (les variables sont positives)

$$P\left(\frac{X_k}{k} > \varepsilon\right) \leq \frac{E(X_1^2)}{\varepsilon^2 k^2}.$$

Par une comparaison avec les série de Riemann on a le résultat.

3. En déduire

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_k}{k} = 0, \text{ p.s.}$$

Par le critère vu en cours on a le résultat. On peut aussi utiliser le premier lemme de Borel Cantelli, on n'a pas besoin de l'indépendance.

Exercice 5. Soit $T = (X, Y, Z)$ un vecteur gaussien centré dans \mathbf{R}^3 de matrice de covariances

$$\Gamma_T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Donner la loi de X^2 .

X suit une loi $\mathcal{N}(0, 3)$, ainsi on peut donner la loi de X^2 par sa densité, on trouve

$$f_{X^2}(y) = 1_{\mathbf{R}^+} \frac{e^{-y/6}}{\sqrt{6\pi y}}.$$

2. Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$, donner la loi de la variable $W = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$. On donnera également l'espérance et la variance de W .

Par définition d'un vecteur gaussien, il est clair que $W = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ où $\sigma^2 = \text{var}(W)$.

On a

$$\sigma^2 = 3\alpha^2 + 1\beta^2 + 3\gamma^2 + 0 \times 2\alpha\beta + 2 \times 2\alpha\gamma + 1 \times 2\beta\gamma = 3\alpha^2 + \beta^2 + 3\gamma^2 + 4\alpha\gamma + 2\beta\gamma.$$

3. Le vecteur (X, Y, Z) admet-il une densité?

Le déterminant de Γ_T est non nul ainsi T admet une densité.

4. On note $U = X - Y$ et $V = X + Y - 2Z$. Montrer que le vecteur (U, V) est un vecteur gaussien.

(U, V) est clairement un vecteur gaussien car c'est l'image d'un vecteur gaussien par une application linéaire, cf. le cours.

5. Calculer la matrice des covariances du vecteur gaussien (U, V) .

On a par un petit calcul :

$$\Gamma_{(U,V)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Les variables U et V sont-elles indépendantes?

Yes car c'est un vecteur gaussien et les deux variables ne sont pas corrélées.