

---

Feuille d'exercices n° 8: Fonctions implicites

---

**Exercice 1** (Deux équations, deux inconnues). 1. Discuter des solutions du système linéaire

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases} \quad (1)$$

où  $u, v$  sont donnés et  $x, y$  sont les inconnues, selon le rang de la matrice du système.

2. Soient maintenant  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application de classe  $C^1$ .  
On écrira  $\varphi(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ . On veut discuter le système d'équations

$$\begin{cases} f(x, y) = u \\ g(x, y) = v \end{cases} \quad (2)$$

aux inconnues  $(x, y)$  pour  $u, v$  donnés. On suppose que la différentielle  $D\varphi(x, y)$  est de rang 2 en tout point  $(x, y) \in U$ . Montrer que le système (2) admet une solution unique (localement, en un sens que l'on précisera).

**Exercice 2.** Étudier la courbe  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y = 0\}$  au voisinage des points  $p = (0, 0)$  et  $q = (1, 1)$ . On donnera, pour cela, un DL à l'ordre 2 de la fonction implicite trouvée.

**Exercice 3.** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$ . Soit  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$ .

Montrer qu'il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $x_0$  et une application  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tels que  $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$  et pour tout  $x \in I$ ,  $f(x, \varphi(x)) = 0$ .

**Exercice 4.** Soit  $E = \mathbb{R}_d[X]$  l'espace vectoriel des polynômes d'une variable réelle de degré au plus  $d$ . On le munit de la norme infinie.

Soit  $P_0 = c_0 + c_1X + \dots + c_dX^d$  un polynôme de  $E$  ayant une racine  $x_0 \in \mathbb{R}$  que l'on supposera simple. Montrer qu'il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$  tel que  $|a_i - c_i| < r$ , le polynôme  $P = a_0 + \dots + a_dX^d$  admet une unique racine simple  $x_P$  dans  $]x_0 - r; x_0 + r[$  et la fonction  $P \mapsto x_P$  est de classe  $C^1$ .

Remarque : avec moins de rigueur, on dira que les racines simples dépendent continûment (et même de façon  $C^1$ ) des coefficients du polynôme.

Indication : On pourra considérer  $F : E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $F(P, x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$ .

**Exercice 5** (L'équation du troisième degré et discriminants). On note  $(x, p, q)$  trois variables réelles. L'équation  $x^3 + px + q = 0$  définit-elle  $x$  comme fonction implicite de  $p$  et  $q$  ?