Feuille d'exercices n° 4: Théorème des accroissements finis

Exercice 1. Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ munie de sa topologie usuelle. On définit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto d(x, F)$. On rappelle que f est 1-lipschitzienne et que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$, il existe $y \in F$ tel que $f(x) = d(x, y)$. On veut montrer que si f est différentiable en x, y est unique .

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus F$. On suppose que f est différentiable en x. Montrer que $\|\nabla f(x)\| \leq 1$.
2. Soit $y \in F$ tel que $d(x, y) = f(x)$.
   On considère la fonction $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f((1-t)x + ty)$.
   En calculant $\varphi'(0)$ de deux façons, montrer d'une part que $\varphi'(0) = \nabla f(x) \cdot (y - x)$ et d'autre part que $\varphi'(0) \leq -\|x - y\|$. En déduire que $\nabla f(x) \cdot (\frac{x-y}{\|x-y\|}) = 1$ et que $\|\nabla f(x)\| = 1$.
3. En déduire que y est unique.

Exercice 2.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que pour tout x, $f'(x) \neq 0$. Montrer que f est un homéomorphisme sur $f(\mathbb{R})$ et que f^{-1} est dérivable en tout point de $f(\mathbb{R})$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que $f'(0)$ existe et est non nulle mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$ et soit $g = f \circ f$.

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer la matrice jacobienne $J_f(x, y)$ en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et calculer la matrice jacobienne $J_g(0, 0)$.
3. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \overline{B}((0, 0), \rho)$, on a $\|J_g(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$.
4. Montrer que g admet un unique point fixe dans la boule $\overline{B}((0, 0), \rho)$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\cos x - \sin y, \sin x - \cos y)$.

1. Montrer que $\|Df(x, y)\| \leq \sqrt{2}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. En déduire que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, la suite récurrente $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\cos x_n - \sin y_n), \qquad y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin x_n - \cos y_n)$$
   converge. Donner l'équation satisfaite par sa limite.

Exercice 5. On considère $E = l^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)$ telles que $\|u\|_1 := \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ est fini. L'espace vectoriel E est alors normé par la norme $\| \ \|_1$.

1. Montrer que l'ensemble des suites de rang fini est dense dans E.
2. Montrer que pour toute forme linéaire continue L sur E, il existe une suite bornée $a = (a_0, a_1, \ldots)$ telle que pour tout $u \in E$, $L(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$.
3. Montrer que la norme $\| \ \|_1$ (vue comme application de E vers $\mathbb{R}$) n'est différentiable en aucun point $u \in E$. On pourra raisonner par l'absurde en s'aidant de la question 1 et en commençant par le cas où $u_n = 0$ pour au moins un n. Dans le cas restant où u ne s'annule pas, on pourra considérer des accroissements $h = (h_n)$ tels que pour N choisi assez grand, $h_n = 0$ pour $n \leq N - 1$ et $h_n = -2u_n$ sinon.