Feuille d'exercices n° 10 : Courbes et surfaces

Exercice 1 (Projection stéréographique)**.** Soit $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $N = (0, 0, 1)$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que pour tout $M = (x, y, z) \in \mathbb{S}\backslash\{N\}$ il existe un unique $P \in \mathcal{P}$ tel que N, M, P soient alignés. Faire un dessin et calculer les coordonnées (X, Y) de P en fonction de (x, y, z). Dans la suite, on notera $(X, Y) = \sigma(x, y, z)$.

b) Déterminer l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ au voisinage desquels $\mathbb{S}$ est le graphe d'une fonction lisse de (x, y).

c) On note $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ et $\mathbb{E}_\pm = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{D},\ \pm z > 0\}$. Montrer qu'il existe des fonctions $\varphi_\pm$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}^\pm$ telles que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{E}_\pm : (x, y, z) \in \mathbb{S} \Leftrightarrow z = \varphi_\pm(x, y).$$

d) Vérifier que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{E}_- \cap \mathbb{S}$, $\sigma(x, y, z) \in \mathbb{D}$ et que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{E}_+ \cap \mathbb{S}$ tel que $z \neq 1$, $\sigma(x, y, z) \notin \overline{\mathbb{D}}$. Montrer que la fonction $\psi_- : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\psi_-(x, y) = \sigma(x, y, \varphi_-(x, y))$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sur quel domaine peut-on définir une fonction ψ_+ par $\psi_+(x, y) = \sigma(x, y, \varphi_+(x, y))$? Est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine ?

Exercice 2 (Tore)**.** Soient r et R deux nombres réels strictement positifs, $R > r$ et soit

$$\mathbb{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = (R + r\cos v)\cos u,\ y = (R + r\cos v)\sin u, z = r\sin v\,, (u, v) \in [0, 2\pi[^2\}.$$

a) Dessiner $\mathbb{T}$.

b) Écrire une équation cartésienne de $\mathbb{T}$.

c) Déterminer l'ensemble des points de $\mathbb{T}$ au voisinage desquels $\mathbb{T}$ est le graphe d'une fonction lisse de (x, y).

Exercice 3 (Courbes en coordonnées polaires)**.** On rappelle que le *changement de coordonnées polaires* est l'application

$$\Phi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \qquad (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta,\ r\sin\theta).$$

a) Montrer que Φ est un difféomorphisme local en tout point de son domaine. Calculer son jacobien $J_\Phi(r, \theta)$.

b) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la courbe paramétrée

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \qquad \theta \mapsto \big(f(\theta)\cos\theta,\ f(\theta)\sin\theta\big).$$

Calculer $\gamma'(\theta)$. Montrer que $\gamma'(\theta) = 0$ si et seulement si $f(\theta) = 0$ et $f'(\theta) = 0$.

c) On suppose que $f(\theta_0) = 0$ et $f'(\theta_0) \neq 0$. Montrer que θ_0 est un point régulier de γ et déterminer la direction de la tangente en $\gamma(\theta_0) = 0$. (Quelle est la signification géométrique de cette direction ?)

d) On suppose maintenant que $f(\theta_0) = f'(\theta_0) = 0$ mais $f''(\theta_0) \neq 0$. Calculer $\gamma''(\theta_0)$. En étudiant le comportement de $\gamma'(\theta_0 + \varepsilon)/|\gamma'(\theta_0 + \varepsilon)|$ lorsque $\varepsilon \to 0^\pm$, montrer que $\gamma(\theta_0) = 0$ est un *point de rebroussement de première espèce* de γ.

e) Montrer qu'en tout point régulier $\theta \in I$, la courbure de γ vaut

$$\kappa(\theta) \;=\; \frac{\left|f(\theta)^2 + 2f'(\theta)^2 - f(\theta)f''(\theta)\right|}{\left(f(\theta)^2 + f'(\theta)^2\right)^{3/2}}.$$

f) **Application : la cardioïde.** On pose $f(\theta) = a(1 - \cos\theta)$ avec $a > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

(i) Montrer que γ admet un unique point singulier sur $[0, 2\pi[$. Déterminer sa nature à l'aide de la question précédente, et identifier la tangente.

(ii) Calculer $\kappa(\theta)$ et vérifier que $\kappa(\theta) \xrightarrow[\theta \to 0]{} +\infty$.
On pourra utiliser $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$ *pour simplifier l'expression.*

(iii) (*Facultatif*) Dessiner γ. Montrer que la cardioïde est symétrique par rapport à l'axe Ox et indiquer les points où la tangente est horizontale ou verticale.

Exercice 4 (Fenêtre de Viviani)**.** Rappel (ou pas) : on dit que deux surfaces régulières sont *transverses* en un point d'intersection si leurs plans tangents sont transverses. En particulier, des surfaces S et C plongées dans $\mathbb{R}^3$ sont transverses en un point $S \cap C$ si la somme du plan tangent à S et du plan tangent à C est $\mathbb{R}^3$. Deux surfaces régulières sont dites transverses si elles le sont en tout point de leur intersection. L'intersection de deux surfaces régulières transverses est une courbe régulière dont la tangente est donnée par l'intersection des plans tangents (qui est de dimension 1).

Soit R un réel strictement positif. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la *sphère* S de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon R, et le *cylindre* C passant par $(0, 0, 0)$, de rayon $R/2$ et d'axe parallèle à la direction z.

a) Écrire une équation cartésienne de S et une équation cartésienne de C.

b) Écrire une équation paramétrique de S, puis une équation paramétrique de $V := S \cap C$.

c) Déterminer les points où S et C sont transverses.

d) Vérifier que V est aussi l'intersection de S et du *cône* Δ d'équation cartésienne $z^2 = (x - R)^2 + y^2$.

e) Écrire une équation paramétrique de Δ. Quels sont les points réguliers de Δ ?

f) Le cône Δ est-il transverse à S ?

g) **Projection stéréographique de la courbe de Viviani.** On définit la *projection stéréographique depuis* $W = (-R, 0, 0)$ comme l'application $\tilde{\sigma} : S \setminus \{W\} \to \Pi$, où $\Pi = \{x = R\}$ est le plan d'équation $x = R$, qui à tout point $M \in S \setminus \{W\}$ associe l'unique point d'intersection de la droite (WM) avec Π.

(i) Vérifier que $W \notin V$ et calculer explicitement $\tilde{\sigma}(x, y, z)$. On notera (u, v) les coordonnées dans Π (selon les directions y et z).

(ii) En utilisant la paramétrisation de V obtenue en b), calculer $(\tilde{\sigma} \circ \gamma)(t)$ et montrer que l'image du point double $(R, 0, 0) \in V$ (atteint en $t = 0$ et $t = \pi$) est l'origine de Π. Déterminer les directions tangentes à $\tilde{\sigma}(V)$ en ce point et conclure sur la nature du point double de la courbe projetée.

(iii) Montrer que la courbe $\tilde{\sigma}(V)$ est incluse dans la courbe algébrique d'équation

$$(u^2 + v^2)^2 \;=\; 4R^2\,(v^2 - u^2).$$

En passant en coordonnées polaires $(u, v) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$ dans Π, reconnaître cette courbe.