
Feuille d'exercices : Courbure, surfaces réglées et de révolution

I. Trièdre de Frenet et courbure

Exercice 1 (Le trièdre de Frenet — construction et formules). Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe de classe \mathcal{C}^3 , régulière. On paramètre par longueur d'arc s (i.e. $\|\gamma'(s)\| = 1$) et on pose $\mathbf{T} = \gamma'$.

1. **Vecteur normal et courbure.** Montrer que $\mathbf{T}'(s) \perp \mathbf{T}(s)$. On définit la *courbure* $\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| \geq 0$ et, lorsque $\kappa(s) > 0$, le *vecteur normal principal* $\mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s)/\kappa(s)$. Interpréter $1/\kappa(s)$ comme le rayon du *cercle osculateur*, limite des cercles passant par $\gamma(s-h)$, $\gamma(s)$, $\gamma(s+h)$ quand $h \rightarrow 0$. Que vaut κ pour une droite ? Pour un cercle de rayon R ?
2. **Courbure algébrique et formules en paramétrage quelconque.** On note $\mathbf{n}(s)$ le vecteur obtenu en faisant tourner $\mathbf{T}(s)$ de $+\pi/2$; c'est la *normale orientée*.
 - (a) Montrer que $\mathbf{T}'(s) = \kappa_s(s) \mathbf{n}(s)$ pour un certain scalaire $\kappa_s(s) \in \mathbb{R}$, dit *courbure algébrique*, vérifiant $\kappa = |\kappa_s|$. Interpréter le signe de κ_s en termes de convexité.
 - (b) Pour γ paramétrée par t quelconque (on note $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$, $v = \|\dot{\gamma}\|$), établir en dérivant $\dot{\gamma} = v \mathbf{T}$:

$$\kappa_s = \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{\|\dot{\gamma}\|^3},$$

où \det est le déterminant 2×2 . Quel est le signe de κ_s pour un cercle parcouru dans le sens direct ?

Exercice 2 (L'astroïde). On considère la courbe $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$. Etudier complètement la courbe symétries, variations, points singuliers, courbure et longueur.

II. Surfaces réglées

Exercice 3 (Surfaces réglées — théorie et exemple). Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière de classe \mathcal{C}^2 et $\beta : I \rightarrow S^2$ un champ de vecteurs unitaires de classe \mathcal{C}^1 . On définit la *surface réglée* Σ paramétrée par $f(t, u) = \gamma(t) + u\beta(t)$. Les droites $u \mapsto \gamma(t) + u\beta(t)$ sont appelées *génératrices*. On note $\partial_t f$ et $\partial_u f$ les dérivées partielles de f .

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Σ soit régulière au voisinage de la directrice (i.e. pour $u = 0$). Quel est alors le plan tangent en un point régulier $f(t_0, u_0)$?
2. **Plan tangent asymptote.** On appelle *plan tangent asymptote* le long de la génératrice $t = t_0$ la limite du plan tangent lorsque $u \rightarrow \pm\infty$. Calculer $\mathbf{N}(t_0, u) = \partial_t f \wedge \partial_u f$, montrer que $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \mathbf{N} / \|\mathbf{N}\|$ existe et est indépendante du signe, et en déduire l'équation du plan asymptote Π_{t_0} . Π_{t_0} contient-il $\gamma(t_0)$?
3. **Ligne de striction.** On appelle *plan central* d'une génératrice le plan tangent à cette génératrice qui est orthogonal au plan asymptote.
 - (a) Montrer que, si $\dot{\beta}(t) \neq 0$, il existe un unique point striction $u_s(t)$ sur la génératrice, donné par
$$u_s(t) = -\frac{\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\beta}(t)}{\|\dot{\beta}(t)\|^2}.$$
 - (b) Montrer que la *ligne de striction* $t \mapsto \gamma(t) + u_s(t)\beta(t)$ est l'ensemble des limites de la perpendiculaire commune aux génératrices D_t et D_{t+h} lorsque $h \rightarrow 0$.
4. **Position du plan tangent dans le cas non développable** Montrer que le plan tangent lorsqu'il est défini n'est jamais d'"un seul coté" de la surface.
5. **Surfaces développables.**

- (a) Montrer que Σ est *développable* (plan tangent constant le long de chaque génératrice) si et seulement si $\det(\dot{\gamma}, \beta, \dot{\beta}) = 0$.
- (b) Montrer l'équivalence : Σ est développable \Leftrightarrow chaque génératrice rencontre les génératrices infiniment voisines (possiblement à l'infini).
- (c) Dans ce cas, l'*arête de rebroussement* est la limite de la perpendiculaire commune à D_t et D_{t+h} . Calculer sa paramétrisation et montrer que les génératrices lui sont tangentes.

6. **Application : l'hyperboloïde à une nappe.** On considère la surface Σ paramétrée par

$$f(t, u) = (\cos t - u \sin t, \sin t + u \cos t, u), \quad (t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

- (a) Identifier la directrice $\gamma(t)$ et la direction réglante $\beta(t)$. Vérifier que $\beta \in S^2$.
- (b) Calculer $\mathbf{N}(t, u) = \partial_t f \wedge \partial_u f$ et montrer que Σ est régulière partout.
- (c) Montrer que Σ est l'hyperboloïde à une nappe $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
- (d) Calculer le plan tangent asymptote le long de la génératrice $t = t_0$. Montrer qu'il est indépendant de u et contient la droite génératrice.
- (e) Calculer $u_s(t)$ et montrer que la ligne de striction est le cercle unité $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.
- (f) Calculer $\det(\dot{\gamma}, \beta, \dot{\beta})$. L'hyperboloïde est-il développable? Interpréter géométriquement.

III. Surfaces de révolution

Exercice 4 (Surfaces de révolution — théorie). Soit $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (r(t), z(t))$ une courbe de classe \mathcal{C}^2 appelée *profil*, avec $r(t) > 0$ sur $\text{Int}(I)$. La *surface de révolution* d'axe Oz engendrée par c est

$$\sigma(t, \theta) = (r(t) \cos \theta, r(t) \sin \theta, z(t)), \quad t \in I, \theta \in [0, 2\pi).$$

Les courbes $\theta = \text{cste}$ sont les *méridiens*; les courbes $t = \text{cste}$ les *parallèles*.

1. **Régularité et plan tangent.**
2. **Position du plan tangent par rapport à la surface.**

Exercice 5 (Application : le tore). Soient $R > r > 0$. On considère le profil $c(t) = (R + r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$, et la surface de révolution \mathcal{T} associée.

1. **Etudier la position du plan tangent**
2. **Courbures des méridiens et des parallèles.**
 - (a) Un *méridien* ($\theta = \theta_0$ fixé) est un cercle de rayon r . Vérifier que sa courbure en tant que courbe de \mathbb{R}^3 vaut $\kappa_{\text{mér}} = 1/r$.
 - (b) Un *parallèle* ($t = t_0$ fixé) est un cercle de rayon $R + r \cos t_0$. Calculer sa courbure $\kappa_{\text{par}}(t_0)$.
 - (c) Pour quels points du tore a-t-on $\kappa_{\text{mér}} = \kappa_{\text{par}}$?
3. Montrer que \mathcal{T} est défini implicitement par $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$.