

---

Feuille d'exercices n° 5: Dérivées d'ordre supérieur

---

**Exercice 1.** Calculer les développements limités à l'ordre 3 en  $(0, 0)$  de :

1.  $f: (x, y) \mapsto y e^x$ .
2.  $f: (x, y) \mapsto \sin(xy) + \cos(xy)$ .

**Exercice 2.** Etudier sur  $\mathbb{R}^2$  les extréma locaux et globaux des fonctions définies par :

1.  $f(x, y) = x^4 - y^4$ .
2.  $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .
3.  $h(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ .
4.  $k(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 2x - 2y$ .

**Exercice 3** (Contre-exemple pour le théorème de Schwarz). Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = y^2 \sin(x/y) \text{ si } y \neq 0; 0 \text{ sinon.}$$

1.  $f$  est-elle continue? différentiable?
2. Calculer les dérivées premières et secondes de  $f$  là où elles existent.
3. Pourquoi a-t-on exhibé un contre-exemple au théorème de Schwarz?

**Exercice 4.** Trouver les extrema de la fonction  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  dans le disque  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Exercice 5.** Déterminer et classer les points critiques de la fonction  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) e^{-x^2 - y^2}.$$

On précisera s'il s'agit de points de minimum ou de maximum (local ou global), ou de point-selles.

**Exercice 6** (Étude de la courbe de Laporte). On considère la *courbe de Laporte* définie par la paramétrisation

$$\gamma: t \mapsto (x(t), y(t)) = (\sin^3 t, \cos t - \cos^4 t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

1. (a) Montrer que la courbe est fermée et déterminer sa période.  
(b) Étudier les symétries éventuelles de la courbe à partir des expressions de  $x(t)$  et  $y(t)$ .
2. Déterminer les valeurs de  $t$  pour lesquelles la courbe admet une tangente verticale ou horizontale.
3. Trouver les points singuliers et les étudier.
4. Déterminer les paramètres  $t$  où la courbe admet un point d'inflexion (la courbe traverse sa tangente).
5. Calculer la longueur de la courbe.
6. Tracer la courbe dans un repère orthonormé à l'aide des informations calculées.
7. **Bonus** : Aire délimitée par la courbe.