Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps
UE de calcul différentiel, courbes et surfaces

Feuille d'exercices n° 3: Fonctions différentiables (suite)

Exercice 1. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et soit u un endomorphisme symétrique de E (i.e. $\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$).

1. On définit $f\colon E \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \langle u(x), x\rangle$. Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point.
2. Soit $g\colon E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \frac{f(x)}{\langle x, x\rangle}.$$
Montrer que g est différentiable en tout point.
Montrer que pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, on a :
$$D_a g = 0 \iff a \text{ est un vecteur propre de } u.$$

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit que f est homogène de degré α si
$$\forall t > 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(t(x, y)) = t^\alpha f(x, y).$$
Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$
Pour l'implication "$\Leftarrow$", on pourra considérer l'application $g\colon t \mapsto f(tx, ty) - t^\alpha f(x, y)$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ et montrer que g est solution d'une équation différentielle.

Exercice 3. On note $C^0([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Soit $f\colon \varphi \in C^0([0, 1]) \mapsto \int_0^1 \varphi^4(t)dt \in \mathbb{R}$. Calculer la différentielle de f.

Exercice 4. On munit $C^2([0, \pi])$ de la norme $\|\varphi\| = \|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty + \|\varphi''\|_\infty$. Soit $f\colon \varphi \in C^2([0, \pi]) \mapsto \int_0^\pi \left((\varphi')^2(t) - \varphi^2(t)\right) dt \in \mathbb{R}$. Calculer la différentielle de f. Caractériser les éléments $\varphi \in C^2([0, \pi])$ tels que la différentielle $\varphi \mapsto D_\varphi f$ s'annule en φ. Pour celà,

1. Montrer qu'en un tel point φ, pour tout $h \in C^2([0, \pi])$ tel que $h(0) = h(\pi) = 0$,
$$\langle \varphi'' + \varphi, h\rangle_{L^2(0,\pi)} = 0$$
2. En déduire que $\varphi'' + \varphi = 0$, puis que $\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0$.
3. Conclure.

Exercice 5. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application différentiable. On suppose que $\lim\limits_{\|v\|\to+\infty} \|f(v)\| = +\infty$ et que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $Df(v)$ est injective. Le but de l'exercice est de montrer que f est surjective.
Soit $a \in \mathbb{R}^2$, on définit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ v \mapsto \|f(v) - a\|^2$.

1. Déterminer $D_v g$ en tout point v.
2. Montrer que g atteint sa borne inférieure en un certain point v_0 et que $D_{v_0} g = 0$ puis conclure.