
Feuille d'exercices n° 2: Fonctions différentiables

Exercice 1. On rappelle que, pour tout naturel $p \geq 1$, la norme L^p d'un vecteur $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ est donnée par $\|X\|_p = (|X_1|^p + \dots + |X_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. L'application $X \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|_p \in \mathbb{R}^+$ est-elle différentiable en 0 ? Même question pour $X \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|_p^p$? Calculer la différentielle quand elle existe.

Exercice 2. 1. Calculer les dérivés partielles de la fonction : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \min(x, y^2)$ en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ où elles existent. Quand est-elle différentiable ?

2. Vérifier la différentiabilité et calculer la différentielle de $(x, y) \mapsto \max(y(y^2 + 3x^2), x(x^2 + 3y^2))$.

Exercice 3. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ et soit $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(A) = \text{tr}(AB)$. Calculer la différentielle de f en tout point.

À quelle condition $D_A f$ est-elle surjective ?

Exercice 4. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ et soit f l'application $f : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto AB$. Calculer la différentielle de f en tout point. À quelle condition sur B la différentielle $D_A f$ est surjective/injective ?

Exercice 5. Soit f l'application $f : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}({}^t AA)$. Calculer la différentielle de f en tout point.

Exercice 6. On note \det et tr le déterminant et la trace d'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la différentielle de \det en $X \in M_n(\mathbb{R})$ est l'application $H \mapsto \text{tr}({}^t \bar{X} H)$ où \bar{X} est la comatrice de X .

Exercice 7. Soit $f : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^{-1}$. Déterminer la différentielle de f , d'abord en $M = I_n$ puis en un point M quelconque.