
Examen du 9 mai 2025

Les documents autres que ce sujet sont interdits et tous les appareils électroniques (calculatrices, téléphones, tablettes, etc) doivent être éteints et hors de portée.

On composera chaque exercice sur une copie différente.

Le barème est donné à titre indicatif, pour un total de 23,5 points.

Exercice 1. Questions de cours : (4,5pts)

- Donner la définition d'une fonction différentiable $f : E \rightarrow F$ entre deux espaces de Banach E et F , en un point x de E .
- Rappeler l'inégalité des accroissements finis, pour une application entre espaces de Banach.
- Énoncer le théorème des fonctions implicites.

Exercice 2. Exercice du TD : (4pts)

On considère l'ensemble \mathcal{C} des points (x, y) du plan vérifiant $x^3 - 2xy + 2y^2 = 1$.

- Montrer que les points de \mathcal{C} au voisinage du point $(1, 1)$ sont de la forme $(x, \varphi(x))$, où φ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 1.
- Déterminer la tangente (droite affine) au graphe de φ au point $(1, 1)$.
- Préciser la position de ce graphe par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.
- Trouver tous les points de \mathcal{C} au voisinage desquels le théorème des fonctions implicites ne s'applique ni pour exprimer x en fonction de y ni pour exprimer y en fonction de x .

Exercice 3. (4 pts "comme en TD" + 4pts "plus avancés")

Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et f la fonction définie sur U par

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

La base canonique de \mathbb{R}^2 est noté $\{e_0, e_1\}$. On notera $v = (x, y) \in U$ et indifféremment $f(v)$ ou $f(x, y)$.

- Justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ et montrer que $D_v f(h) = \frac{1}{\|v\|^2} \left(h - 2 \langle h, \frac{v}{\|v\|} \rangle \frac{v}{\|v\|} \right)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^2$ et tout $v \in U$.
Pour la suite, on remarquera que pour tout $v \in U$, l'application $\sigma_v : h \mapsto h - 2 \langle h, \frac{v}{\|v\|} \rangle \frac{v}{\|v\|}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la direction v : en particulier, elle préserve le produit scalaire.
 - Montrer que f est un difféomorphisme au voisinage de tout point $(x_0, y_0) \in U$.
 - Soit $(X, Y) \in U$. Montrer qu'il existe un unique point $(x, y) \in U$ tel que $f(x, y) = (X, Y)$.
Indication : commencer par calculer $X^2 + Y^2$ en fonction de x et y .
 - En déduire que f est un difféomorphisme global de U sur lui-même.

(Partie plus avancée 4 points)

- Soient $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow U$ deux fonctions régulières sur un intervalle I . On note $\tilde{\gamma}_i = f \circ \gamma_i$. À l'aide de la règle de la chaîne, exprimer le quotient

$$\frac{\langle \tilde{\gamma}'_1(t), \tilde{\gamma}'_2(t) \rangle}{\|\tilde{\gamma}'_1(t)\| \cdot \|\tilde{\gamma}'_2(t)\|}$$

en fonction de $\gamma'_i(t)$, $i = 1, 2$, et de leur norme, quel que soit $t \in I$.

Question bonus : comment interprétez-vous ce résultat ?

iii (a) Montrer que la différentielle seconde de f est donnée par

$$D_v^2 f[h, k] = \frac{-2}{\|v\|^4} \left(\langle h, k \rangle v + \langle h, v \rangle k + \langle k, v \rangle h - 4 \frac{\langle h, v \rangle \langle k, v \rangle}{\|v\|^2} v \right),$$

quels que soient $v \in U$, $h \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{R}^2$.

- (b) Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . En utilisant la règle de la chaîne (différentiation des fonctions composées), exprimer $D_v^2(g \circ f)[h, k]$ à l'aide de $D_v f$, $D_v^2 f$, $D_{f(v)} g$ et $D_{f(v)}^2 g$.
- (c) Quelle que soit la fonction $g : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert V , on note Δg l'application qui à $v = (x, y) \in V$ associe

$$\Delta g(v) = \text{tr}(D_v^2 g) = \sum_{i=0}^1 D_v^2 g[e_i, e_i] = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y).$$

À l'aide de ce qui précède, montrer que si $\Delta g = 0$ alors $\Delta(g \circ f) = 0$.

Exercice 4. ("Comme en td" a) b) c) d) e) 5 pts + 2pts "avancés")

Soient $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz$, et l'ensemble

$$W_{A,B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = A, h(x, y, z) = B\},$$

$$g(x, y, z) = xy + yz + zx \quad \text{et} \quad h(x, y, z) = x + y + z, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

L'objectif est de minimiser f sur l'ensemble $W_{A,B}$. On commence par considérer l'ensemble $H_B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid h(x, y, z) = B\}$.

- a) Montrer que la restriction de g à H_B est majorée.
- b) Trouver le maximum de $g(x, y, z) = xy + yz + zx$ sous la contrainte $h(x, y, z) = B$.
- c) En déduire que $W_{A,B}$ est non vide si et seulement si $B^2 \geq 3A$.
- d) Montrer que f admet des extrema sur $W_{A,B}$ si et seulement si $B^2 \geq 3A$. (indication : compacité)
- e) En quels points peut-on utiliser le théorème des multiplicateurs de Lagrange pour minimiser f sur $W_{A,B}$?

- f) Trouver les maxima et minima globaux de f sur $W_{A,B}$ en fonction de A et B .

Question bonus : en déduire que pour tout $(x, y, z) \in W_{A,B}$, $|xyz - (\frac{9AB - 2B^2}{27})| \leq 2(B^2 - 3A)^{\frac{3}{2}}$.