

Partiel du vendredi 14 mars

Durée : 90 min

Les calculatrices, ordinateurs, tablettes et téléphones portables sont interdits durant l'épreuve ainsi que les notes de cours et TD.

Exercice 1. (8 points) Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = xy e^{-\pi(x^2+y^2)}$$

Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature : maximum ou minimum local, point-selle, maximum ou minimum global.

Les deux exercices suivants concernent la notion de différentiabilité au sens de Gateaux définie comme suit.

Soient E et F deux espaces de Banach, $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F , U un ouvert de E , et $f : U \subset E \rightarrow F$ une application. On dit que f est *différentiable au sens de Gateaux* (ou Gateaux-différentiable) en $x \in U$ s'il existe $G \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que, pour tout $h \in E$,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x + \tau h) - f(x) - G(\tau h)}{\tau} = 0.$$

Dans ce cas, la *différentielle de Gateaux* en $x \in U$ est notée $\hat{D}_x f := G$.

Exercice 2. (9 points)

1. Montrer que si $f : U \rightarrow F$ est différentiable en un point x , alors elle est Gateaux-différentiable en ce point et $\hat{D}_x f = D_x f$.
2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x_1, x_2) = \frac{|x_1|^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}$$

pour $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ et $g(0, 0) = 0$.

- (a) Montrer que g est Gateaux-différentiable en $(0, 0)$.
- (b) Montrer que g est continue.

Indication : on pourra majorer différemment $|g(x_1, x_2)|$ selon les cas $x_1^2 \leq |x_2|$ et $x_1^2 > |x_2|$.

- (c) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- (d) En raisonnant par l'absurde et en considérant la courbe $\gamma(t) := (t, t^2)$ définie pour $t \in [-1, 1]$, montrer que g n'est pas différentiable.
3. Dans cette question, on considère E et F des espaces de Banach, U un ouvert de E , et une application $f : U \rightarrow F$, Gateaux-différentiable en tout $x \in U$, telle que $x \mapsto \widehat{D}_x f$ est continue.
- (a) Soit $a \in U$. Montrer que l'application g définie au voisinage de 0 par

$$g(x) := f(x + a) - f(a) - \widehat{D}_a f(x)$$

est Gateaux-différentiable en 0, que $g(0) = 0$, que $\widehat{D}_0 g = 0$ et $x \mapsto \widehat{D}_x g$ est continue.

- (b) Soit $h \in E$ dans un voisinage de 0. En revenant à la définition d'une fonction dérivable, montrer que l'application $\ell : t \in [0, 1] \mapsto \ell(t) := g(th)$ est dérivable en tout point $t \in]0, 1[$, calculer sa dérivée et utiliser l'inégalité des accroissements finis pour montrer que f est différentiable.

Exercice 3. (8 points)

1. Dans cette question E est \mathbb{R}^n muni de sa topologie usuelle.
- (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $K \subset \mathbb{S}^{n-1}$ (sphère unité de \mathbb{R}^n) tel que :

$$\mathbb{S}^{n-1} = \bigcup_{y \in K} \{x \in \mathbb{S}^{n-1}, \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

- (b) Soit f une application $E \rightarrow F$ Lipschitzienne et Gateaux-différentiable. Montrer que l'application g définie par $g(u) := f(x + u) - f(x) - \widehat{D}_x f(u)$ est Lipschitzienne, Gateaux-différentiable et de Gateaux-différentielle nulle en $u = 0$.
- (c) Montrer que g est différentiable en 0.
- (d) En déduire que f est différentiable en x .
2. (Bonus) Dans cette question $E = \ell^1(\mathbb{N})$, l'espace des suites réelles sommables, muni de sa norme usuelle, définie par

$$\|u\|_1 := \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Montrer que l'application $N : u \in E \mapsto \|u\|_1$ est Gateaux-différentiable en toute suite u qui ne s'annule pas. Qu'en conclure ?