
Partiel

Mardi 17 mars 2026 — 11h30 – 13h

Documents et calculatrices interdits

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 : (3 pts) Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux.

1. Montrer que si J est un idéal de B , alors son image réciproque $f^{-1}[J]$ est un idéal de A .
2. Montrer que si f est surjective et I est un idéal de A , alors son image directe $f[I]$ est un idéal de B .
3. Donner un exemple de f non-surjectif et I idéal dans A tel que $f[I]$ n'est pas un idéal dans B .

Exercice 2 : (5 pts) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ deux à deux distincts. Soit $P = (X - a_1) \cdots (X - a_n) + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

1. Supposons n impair. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Que dire de l'irréductibilité de P dans $\mathbb{Z}[X]$ si n est pair ?

Exercice 3 : (5 pts)

1. Pour tout $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ avec $a_n \neq 0$, on note $P^* = \sum_{i=0}^n a_{n-i} X^i$.
 - (a) Montrer que $P(X) = X^n P^*(1/X)$.
 - (b) Montrer que si P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, alors P^* est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Montrer que le polynôme $2X^5 - 4X^2 - 3$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 4 : (6 pts) Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

1. Montrer que $N(a + i\sqrt{2}b) = a^2 + 2b^2$ est une norme sur A qui en fait un anneau euclidien.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de l'équation diophantienne $y^3 - x^2 = 2$. Montrer que $x + i\sqrt{2}$ est un cube dans A . En déduire l'ensemble des solutions de l'équation.

Exercice 5 : (6 pts) Un anneau est *artinien* s'il n'y a pas de chaîne infinie strictement descendante $A \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ d'idéaux. On cherche à montrer qu'un anneau artinien intègre non-trivial est un corps. Soit donc $A \neq \{0\}$ un anneau artinien intègre.

Attention, si on ne sait pas que A est unitaire, on rappelle que $(x) = \mathbb{Z}x + Ax$.

1. Montrer que si $e \in A$ satisfait $ea = a$ pour un $a \in A^*$, alors $ea = a$ pour tout $a \in A$. (Cela n'utilise pas que A est artinien.)
2. Pour $x \in A^*$ trouver des entiers $m < n$, $z \in \mathbb{Z}$ et $a \in A$ avec $x^m = (zx^{n-m} + ax^{n-m})x^m$. En déduire que A est unitaire.
3. Pour $x \in A^*$ montrer que x est inversible. Conclure que A est un corps.