

Contrôle Final

Mardi 12 mai 2026 — 10h – 12h

Documents et calculatrices interdits

Le barème est donné à titre indicatif

Rédiger votre solution de l'exercice 1 dans une copie, des exercices 2 et 3 dans une autre copie, et des exercices 4 et 5 dans une troisième copie

Exercice 1 : (2+1+3 pts) Soit A un anneau (commutatif) et I un idéal de A . On note

$$\sqrt{I} = \{x \in A : \exists n \in \mathbb{N}^* x^n \in I\},$$

le *radical* de I .

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A .
2. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
3. Montrer que pour tout idéal J on a $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ et $\sqrt{I+J} \supseteq \sqrt{I} + \sqrt{J}$.

Exercice 2 : (2+1+3+1 pts) Soit A l'ensemble des suites rationnelles convergentes (mais dont la limite peut être irrationnelle), et I le sous-ensemble des suites rationnelles convergentes vers 0. Dans cet exercice vous pouvez utiliser librement des résultats connus sur les suites.

1. Montrer que l'addition et la multiplication de suites fait de A un anneau (commutatif) unitaire.
2. Montrer que I est un idéal dans A .
3. Montrer que tout élément de $A \setminus I$ est inversible dans A modulo I . En déduire que I est un idéal maximal de A , et que A/I est un corps.
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty}$ donne un isomorphisme d'anneau unitaire entre A/I et $\mathbb{R}$.

Remarque : Une suite $(u_n)_n$ est convergente ssi $\forall k \in \mathbb{N}^* \exists N \in \mathbb{N} \forall j, \ell > N |u_j - u_\ell| < 1/k$ (suite de Cauchy). Ainsi la définition de l'ensemble A n'a pas besoin de l'existence *a priori* de $\mathbb{R}$. Ceci donne donc une construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$.

Exercice 3 : (3 pts) Soit K un corps et P un polynôme sur K de degré n . Montrer que si P n'a pas de racine dans une extension de K de degré inférieur ou égale à $n/2$, alors P est irréductible sur K .

Exercice 4 : (2+2 pts) En utilisant les réductions mod 2 ou mod 3, montrer que les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$:

$$(a) -5X^5 + 8X^4 + 4X^3 - 2X^2 + 5 \quad (b) X^4 + 2X^3 - 13X^2 + 6X - 11.$$

Exercice 5 : (1+1+2+2+2 pts) On rappelle que le $n^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique est $\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n^*} (X - \zeta)$, où $\mathbb{U}_n^*$ est l'ensemble des racines primitives $n^{\text{ièmes}}$ de 1, et que $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le but de cet exercice est de montrer que Φ_8 est réductible sur tout corps fini.

1. Montrer que $\Phi_8(X) = X^4 + 1$.
2. Donner la décomposition de Φ_8 dans $\mathbb{F}_2$.
3. Soit p premier impair. Montrer que $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{8}$. En déduire que $\mathbb{F}_{p^2}^\times$ contient toujours un élément a d'ordre 8.
4. En déduire que Φ_8 est scindé sur $\mathbb{F}_{p^2}$.
5. Conclure.