

Deuxième session

Vendredi 26 juin 2026 — 10h – 12h

Documents et calculatrices interdits

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 : (1+3 pts) Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif unitaire. On note $B = \{x \in A : x^2 = x\}$.

1. Vérifier que pour tout $x \in B$ on a $1 - x \in B$.
2. On pose $x \circ y = x + y - 2xy$. Montrer que $\circ$ est une loi de composition interne sur B et que $(B, \circ, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire.

Exercice 2 : (2+1+2 pts) Soient $f \leq -2$ un entier et $\omega, \bar{\omega}$ les deux solutions complexes de $z^2 - z - f = 0$. On considère l'ensemble $A = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$.

1. Calculer $\omega + \bar{\omega}$ et $\omega\bar{\omega}$. Montrer que A est le sous-anneau $\mathbb{Z}[\omega]$ de $\mathbb{C}$ et est stable par conjugaison.
2. Montrer que $z\bar{z} \in \mathbb{N}$ pour tout $z \in A$.
3. Montrer qu'un élément $p + q\omega \in A$ est inversible dans A si et seulement si $p^2 + pq - fq^2 = 1$. En déduire que les seuls éléments inversibles de A sont 1 et -1 .

Exercice 3 : (5+1+1 pts) On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}[X]/(2(X^2 - 1))$, et on note x et $\bar{2}$ les classes de X et 2, respectivement.

1. On cherche à montrer que les seuls éléments inversibles de A sont les (classes de) ± 1 . Soient donc $u, v \in A$ les classes de $U, V \in \mathbb{Z}[X]$, avec $uv = 1$.
 - (a) Montrer que $A/(2) \cong F_2[X]$. En déduire que $U, V \equiv 1 \pmod{2\mathbb{Z}[X]}$.
 - (b) Si $U = 1 + 2P$ et $V = 1 + 2Q$ pour des $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$, montrer que $X^2 - 1$ divise $P + Q + 2PQ$.
 - (c) En déduire que pour $\ell = \pm 1$ on a $P(\ell) = Q(\ell) \in \{0, -1\}$.
 - (d) En déduire que P est congru à 0 ou -1 modulo $X^2 - 1$.
 - (e) En déduire que $U \equiv \pm 1 \pmod{2(X^2 - 1)}$.
2. Vérifier qu'il y a $a, b \in A$ avec $a\bar{2} = \bar{2}x$ et $b\bar{2}x = \bar{2}$.
3. Montrer que $\bar{2}$ et $\bar{2}x$ ne sont pas multiples l'un de l'autre par un élément inversible de l'anneau.

Exercice 4 : (2+2+1 pts) Soit $A = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues réelles, et I le sous-ensemble des fonctions réelles nulles en 0. On admet que A est un anneau, et que I est un idéal dans A .

1. Soient $f_1, \dots, f_n \in A$. Montrer que tout élément g de l'idéal $(f_1, \dots, f_n)$ vérifie $|g| = O(\sum |f_i|)$ au voisinage de 0 (où $g = O(h)$ au voisinage de 0 signifie qu'il existe une constante c telle que $g(x) \leq ch(x)$ pour $|x|$ suffisamment petit).
2. En déduire que I n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments, et donc que A n'est pas noethérien.
3. Montrer que $I^2 = I$, où I^2 est l'idéal qui consiste des sommes des produits de deux

Exercice 5 : (1+2+1+1+2+1 pts) Soit $\alpha = \frac{1+i\sqrt{19}}{2} \in \mathbb{C}$ et $A = \mathbb{Z}[\alpha]$. On note $N : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z\bar{z}$ la norme sur $\mathbb{C}$.

1. Déterminer le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que pour tous $a, b \in A \setminus \{0\}$, il existe $q, r \in A$ tels que $r = 0$ ou $N(r) < N(b)$ et qui vérifient soit $a = bq + r$, soit $2a = bq + r$.
(Indication : Si $a/b = u + \alpha v$ avec $u, v \in \mathbb{Q}$, on peut distinguer selon $||v| + \frac{1}{2} - v| \leq \frac{1}{6}$ ou pas.)
3. Montrer que $A/(2) \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$.
4. En déduire que l'idéal engendré par 2 est maximal dans A .
5. Soit I un idéal non trivial de A , et soit $a \in I \setminus \{0\}$ de norme minimale. En utilisant les questions précédentes, montrer que $I = (a)$.
6. En déduire que A est principal.