Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Année 2025-2026
Printemps 2026

## FICHE TD 6 - Produit de convolution. Transformée de Fourier. Séances 11-12.

<u>Normalisation :</u> la transformée de Fourier $\widehat{f}$ d'une fonction absolument intégrable $f$ est ici donnée par

$$\widehat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x)\, dx\,.$$

**Parfois, dans ce qui vient ci-dessous, la fonction dont on prend la transformée de Fourier n'est pas dans $L_1$, mais elle est dans tous les cas dans $L_2$.**

**Exercice 1** - *Fonctions indicatrices (ou fonctions caractéristiques).* Soit $I \subset \mathbb{R}$ et

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0\,, & \text{si } x \notin I\,, \end{cases}$$

la fonction indicatrice (ou caractéristique) sur $I$.

1. On pose $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Établir par calcul direct que $1_I \star 1_I$ est une fonction continue, qui est linéaire par morceaux. Tracer son graphe.
2. Soit $h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$. Établir par calcul direct que $1_{[-1,1]} \star h$ est continue.

**Exercice 2** - *Deux fonctions dans $L^1_{loc}$.* Soient $a$ et $b$ deux nombres réels fixés. Soit $f_a$ donnée par $f_a(x) = e^{ax}$. Justifier l'existence des produits de convolution suivants, puis les calculer :

$(a)$ $(f_a 1_{[0,+\infty[}) \star (f_b 1_{[0,+\infty[})$,

$(b)$ $1_{[-a,a]} \star (f_b 1_{[0,\infty]})$,

$(c)$ $(1_{[-a,a]} \star f_b) 1_{[0,\infty]}$

**Exercice 3** - *Convolée de Gaussiennes.*

Pour $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on considère la fonction $g_{m,\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

On admet que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$.

1. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_{m,\sigma}(x) dx$.
2. Montrer que $g_{p,\sigma} \star g_{q,\tau} = g_{p+q,\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}$.

**Exercice 4** La fonction sinc donnée par $\text{sinc}(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ est appelée *sinus cardinal*. Soit $1_{[-a,a]}$ la fonction indicatrice de $[-a, a]$.

1. Calculer la transformée de Fourier de $\frac{1}{2a}1_{[-a,a]}$.
2. Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(x)dx$.
3. Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(x)dx$.
4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0\,, \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1\,, \\ 0 & \text{si } |x| > 1\,. \end{cases}$
5. Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^4(x)dx$.

**Exercice 5** Soit $H = 1_{[0,+\infty[}$ la fonction de Heaviside.

1. Calculer la transformée de Fourier de $f$ avec $f(x) = xe^{-x}H(x)$.
2. Calculer la transformée de Fourier de $f$ avec $f(x) = x^n e^{-x}H(x)$.
3. Calculer la transformée de Fourier de $f$ avec $f(x) = xe^{-|x|}$.

## Exercices supplémentaires

**Exercice 6** On cherche une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$-f''(x) + f(x) = e^{-2|x|}. \tag{$E$}$$

1. Montrer que, si $f$ est solution, alors $\widehat{f}$ satisfait

$$\widehat{f}(k) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1+k^2} - \frac{1}{4+k^2}\right).$$

2. En déduire $f$.
   *Révision TD1 (indépendant du reste de l'exercice) : retrouver directement à partir de la formule que vous venez d'obtenir pour $f$ qu'elle est deux fois dérivable au voisinage de* $0$*.*
3. Donner toutes les solutions de $(E)$. Pourquoi $f$ est-elle la seule solution de $(E)$ à laquelle aboutit naturellement la procédure précédente (formelle en général) ?

**Exercice 7** Soient $k_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (absolument intégrable).

1. Quelle est la transformée de Fourier de $g$ avec $g(x) = f(x)\cos(k_0 x)$ (en terme de la transformée de $f$) ?
2. Tracer le graphe de la transformée de Fourier de $g$ avec $g(x) = 1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)\cos(2\pi x)$.

**Exercice 8** Calculer la transformée de Fourier de $f$ avec $f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\pi(x-\frac{1}{2})}$.
*Indication*: on pourrait utiliser $\cos(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.