Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Année 2025-2026
Printemps 2026

FICHE TD 5 - Intégrales à paramètres. Transformation de Laplace. Séances 9-10.

On rappelle que la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f]$ d'une fonction f est donnée sur son domaine de définition par

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt\,.$$

Exercice 1 Soient $f(x) := (\int_0^x e^{-t^2}dt)^2$ et $g(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que f et g sont $\mathcal{C}^1$ et calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) + g'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; en déduire la valeur de $f(x) + g(x)$.
3. En déduire que $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 2 (*Révision éléments simples*) Décomposer en éléments simples réels les fractions rationnelles :

$$A(X) = \frac{X}{X^2-4}; \quad B(X) = \frac{1}{X^2-2X+4}; \quad C(X) = \frac{X^3}{(X-1)^4}; \quad D(X) = \frac{X^2}{X^3-1}.$$

Exercice 3 Par un calcul explicite, trouver la transformée de Laplace de f où

$$(a)\ f(t) = te^{6t}, \qquad (b)\ f(t) = e^{-t}\sin 2t\,.$$

En se ramenant à des résultats connus, trouver la transformée de Laplace de f où

$$f(t) = e^{\gamma t}\sin(\alpha t)\cos(\beta t),$$

avec α, β, γ des réels.

Exercice 4 (*Valeur initiale et finale*) Soit $f(t) := e^{\gamma t}\cos(t)$. Déterminer, pour $\gamma < 0$, puis pour $\gamma \geq 0$,

$$\lim_{s\to 0} s\mathcal{L}[f](s), \text{ et } \lim_{s\to+\infty} s\mathcal{L}[f](s),$$

lorsque cela est possible.

Exercice 5 (*Inversion de la transformation de Laplace*) Trouver la fonction f telle que $\mathcal{L}[f](s) = Y(s)$, où

$$(a)\ Y(s) = \frac{7s-25}{s^2-7s+12}, \quad (b)\ Y(s) = \frac{2s-5}{s^2+4s+8}, \quad (c)\ Y(s) = \frac{s+4}{(s-2)^3}, \quad (d)\ Y(s) = \frac{s^2-3s+3}{s^3-3s^2+4s-2}.$$

Exercice 6 (*Équations différentielles linéaires avec conditions initiales*)
En utilisant la transformation de Laplace, trouver la solution $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de chacun des problèmes suivants :

$$\begin{aligned} &(a)\ f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = e^{3t}, && f(0) = 1, \quad f'(0) = 0\,, \\ &(b)\ f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = \cos(t), && f(0) = 1, \quad f'(0) = 0\,. \end{aligned}$$

Exercices supplémentaires

Exercice 7 Soit F donnée pour $p > 0$ par

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px}\frac{\sin x}{x}dx\,.$$

Let but est de calculer $F(p)$ en passant par $F'(p)$.

1. Montrer que l'intégrale dans la définition de $F(p)$ est convergente pour tout $p > 0$.

2. Soit $p_0 > 0$. Montrer que $F'(p)$ existe pour $p \geq p_0$. En déduire que $F'(p)$ existe pour tout $p > 0$.
3. Vérifier par dérivation que $\frac{p \sin x + \cos x}{1+p^2} e^{-px}$ est une primitive de $-e^{-px} \sin x$ et calculer $F'(p)$.
4. En déduire que $F(p) = -\arctan p + C$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que $|F(p)| \leq \int_0^\infty e^{-px} dx$ et en déduire que $\lim_{p \to +\infty} F(p) = 0$.
6. Montrer que
$$C = \lim_{p \to +\infty} (F(p) + \arctan p) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8 Calcul d'une fonction définie par une intégrale.

Soit $f(p) := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{px} \, dx.$

1. Montrer que f est bien définie sur tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. En déduire que $f(p) = \sqrt{\pi} e^{p^2/4}$. *On rappelle que* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 9 Dérivation des intégrales à paramètres.

Soit $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t} \sin(tx)}{1 + t^4} \, dt\,.$

1. Montrer que l'intégrale pour définir $f(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la k-ième dérivée $f^{(k)}(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que f vérifie l'équation différentielle : $f^{(4)}(x) + f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

Exercice 10 (*Inversion de la transformation de Laplace*) Trouver la fonction f telle que $\mathcal{L}[f](s) = Y(s)$, où

$$(a)\, Y(s) = \frac{1}{s^2 - 5s + 6}, \quad (b)\, Y(s) = \frac{s + 4}{s^2 + 6s + 10}, \quad (c)\, Y(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1},$$