

FICHE 4 - Révision intégrales. Intégrales généralisées. Séances 7-8.

Exercice 1 Calculer par intégration par parties ou changement de variables les intégrales à bornes suivantes :

$$(a) \int_0^{2\pi} x \cos(x) dx, \quad (b) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 2 Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

$$(a) \int_0^\infty \ln(t) dt, \quad (b) \int_0^\infty e^{-4t} dt, \quad (c) \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt, \\ (d) \int_0^\infty e^{-t^2} dt, \quad (e) \int_0^\infty \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} dt, \quad (f) \int_2^\infty \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt.$$

Exercice 3 Montrer en intégrant par partie que

$$\int_1^t \frac{\sin(x)}{x} dx = \cos(1) - \frac{\cos(t)}{t} - \int_1^t \frac{\cos(x)}{x^2} dx.$$

En déduire que l'intégrale **impropre** $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente.

Exercices supplémentaires

Exercice 4 Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ? ($n \in \mathbb{N}$, $a \in]0, +\infty[$, $b \in]0, +\infty[$)

$$(a) \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt, \quad (b) \int_0^2 \ln(t) dt, \quad (c) \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt, \\ (d) \int_1^\infty \frac{dx}{x^a}, \quad (e) \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad (f) \int_0^\infty e^{-bx} \sin(ax) dx.$$

Exercice 5 Soit $F : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée, dérivable avec dérivée continue. Montrer que l'intégrale impropre

$$\int_1^\infty \frac{F'(x)}{x} dx$$

est convergente. En déduire la convergence de $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x} dx$ et de $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Exercice 6 Discuter selon les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale suivante :

$$(a) \int_2^\infty \frac{1}{(\ln t)^a t^b} dt, \quad (b) \int_{2022}^\infty \frac{1}{(\ln t)^a t^b} dt.$$

Exercice 7 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue, on rappelle que f est **absolument intégrable** (ou sommable) sur \mathbb{R} si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty.$$

1. Soit f une fonction continue absolument intégrable. On *suppose* que la limite $l := \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ existe, montrer que $l = 0$.
2. On cherche maintenant à montrer qu'une fonction continue absolument intégrable n'a pas forcément une limite nulle quand $|x| \rightarrow +\infty$. On considère donc dorénavant f donnée par la série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, où les g_n sont les fonctions à supports deux à deux disjoints données par $g_n(x) = g(2^n(x - n))$, avec g donnée par

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{pour } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) Esquisser le graphe de la fonction continue f .
- (b) Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = 1.$$

- (c) Quelle est la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$? Quelle est la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n + \frac{1}{2^n})$?
- (d) En déduire que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$.