Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Printemps 2026

FICHE TD 3 – Séries de Fourier et EDP. Séances 5-6.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [0, \pi], \\ 0 & \text{pour } x \in]\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.
3. En déduire la série de Fourier de f qu'on notera Sf.
4. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
5. En déduire, en fonction de $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
4. Calculer les sommes des séries numériques suivantes (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\quad (b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, paire et telle que

$$f(x) = 2x - \pi \qquad \text{sur } [0, \pi].$$

1. Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$ et exprimer $f(x)$ sur $[\pi, 2\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier de f. On note $Sf(x)$ la somme de la série.
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
4. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

5. En utilisant la formule de Parseval, calculer

$$\sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$. Montrer que F satisfait l'équation de transport $\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est solution de l'équation des ondes (appelée encore équation des cordes vibrantes)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ sur } \mathbb{R}^2,$$

si et seulement s'il existe des fonctions A et B de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,, \quad f(x,y) = A\left(\frac{x-y}{2}\right) + B\left(\frac{x+y}{2}\right)\,.$$

Indication : on pourra utiliser le changement de variables $u = \frac{x+y}{2}$ *et* $v = \frac{x-y}{2}$ *et calculer* $\dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v} f(u+v, u-v)$.

Exercice 6. En effectuant le changement de variables $u = x+y$, $v = x-y$, déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation de transport

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^2.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et vérifiant

$$f(x) = x \qquad \text{sur } [-\pi, \pi[.$$

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.
3. En déduire la série de Fourier de f qu'on notera Sf.
4. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
5. En déduire la valeur de la somme
$$\sum_{p \geqslant 0} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

Exercice 8. Soit $\alpha \in]0, \pi[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\alpha, \alpha] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.
3. En déduire la série de Fourier de f.
4. En déduire la somme de la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)^2}{n^2}.$$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire et telle que

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2} \qquad \text{sur }]0, \pi].$$

1. Dessiner le graphe de f sur une période.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. Calculer la série de Fourier de f (avec les fonctions sin et cos).
4. En déduire la valeur des sommes suivantes :
$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin n}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
4. Calculer les sommes des séries numériques suivantes :

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad (c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \operatorname{ch} x$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
4. Calculer les sommes des séries numériques suivantes :

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}, \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 4π-périodique et paire définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-6\pi, 6\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on

$$\pi - x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)}{(2n+1)^2} \, ?$$

Exercice 13. Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x(\pi - x)$.

1. Déterminer une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi]$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$.
2. Déterminer une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi]$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx)$.
3. Calculer les sommes des séries numériques suivantes :

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}, \quad (c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}.$$

Exercice 14. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + y = f(x)$$

où f est la fonction 2π-périodique et paire telle que

$$f(x) = 2x - \pi + \frac{8}{\pi} \cos(x) \qquad \text{sur } [0, \pi]\,.$$

1. Rappeler la série de Fourier de f à partir d'un exo ci-dessus (modulo un mode de Fourier supplémentaire).
2. Calculer une solution particulière de (E) développable en série de Fourier.
3. En déduire la solution générale de (E).

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = x$.
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - y = f$$

1. Rappeler à partir d'un exo ci-dessus la série de Fourier de f.
2. On suppose que y_0 est une solution particulière de (E) développable en série de Fourier : trouver sa série de Fourier.
3. On rappelle de la fiche précédente que la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par

$$g(x) = \text{ch } (x) - \frac{\text{sh } (\pi)}{\pi}$$

admet pour série de Fourier $g(x) = \dfrac{2\text{sh } (\pi)}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos(nx)$. Trouver un développement en série de Fourier de la primitive G vérifiant $G(0) = 0$.
4. En déduire une formule pour y_0. Vérifier que y_0 est C^2 sur $]-\pi, \pi[$ et solution de (E) sur cet intervalle.
5. En déduire la solution générale de (E) sur $]-\pi, \pi[$.

Exercice 16. On considère l'équation de Laplace pour $(x, y) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \tag{EL}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les fonctions $u_n(x, y) = e^{-nx}\cos(ny)$ et $v_n = e^{-nx}\sin(ny)$ sont solutions de (EL) de période 2π en y.
2. Soit

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}\big(a_n \cos(ny) + b_n \sin(ny)\big).$$

Trouver les coefficients a_n et b_n pour que $u(x, y)$ vérifie la condition de bord $u(0, y) = y$, $\forall y \in]-\pi, \pi[$.
3. Montrer que u est solution 2π-périodique en y de (EL) sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$.

Exercice 17. On considère l'équation de la chaleur

$$(EC) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in]0, L[,\ \forall t > 0 \qquad (1) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L], \qquad (2) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & \forall t \geq 0 \qquad (3) \end{cases}$$

qui modélise le problème suivant : une barre métallique de longueur L, représentée par le segment $[0, L]$, dont la température à l'instant t au point $x \in [0, L]$ est donnée par $u(x, t)$. On cherche à déterminer u en connaissant la condition initiale (2) et les conditions aux bords (3).

On pose $D =]0, L[\times]0, +\infty[$ et on suppose que u_0 est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, L]$ et vérifie les conditions aux bords $u_0(0) = u_0(L) = 0$. On va montrer que (EC) admet une solution u, en particulier assez régulière pour satisfaire (1) au sens classique, qui est de plus continue sur $\overline{D} := [0, L] \times [0, +\infty[$.

1. Montrer que si une fonction u régulière et solution de (1) s'écrit sous la forme $u(x, t) = F(x)G(t)$, où F et G ne s'annulent pas sur $]0, L[$ ou $]0, +\infty[$ (dans cette question), alors F et G vérifient chacune une équation différentielle linéaire qu'on déterminera.
2. Supposant u non identiquement nulle sur D, résoudre ces équations différentielles en tenant compte des conditions aux bords (3).

Soit $\bar{u}_0$ la fonction impaire et $2L$-périodique qui coïncide avec u_0 sur $[0, L]$.

3. Justifier l'existence et l'unicité d'une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telle que $\bar{u}_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. En déduire que toute fonction de la forme

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \tag{4}$$

est une solution de (1) et (3).

5. Montrer pour conclure que la fonction u ainsi définie satisfait (2) et est bien continue sur $\bar{D}$.
6. On montre dans cette question que la répartition de température tend vers l'état d'équilibre que constitue ici la fonction nulle sur $[0, L]$. Plus précisément, si $f_t : x \mapsto u(x,t)$ avec u toujours définie en (4), montrer que la famille de fonctions $(f_t)_{t\geq 0}$ tend vers 0 uniformément sur $[0, L]$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 18. On considère l'équation différentielle

$$y'' + y = |\cos(x)| \tag{E}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = |\cos(x)|$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. Quelle est la plus petite période de f ?
2. Déterminer la série de Fourier de f.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Sf(x) = f(x)$. A-t-on convergence uniforme ?
4. Calculer une solution particulière de (E) développable en série de Fourier.
5. En déduire la solution générale de (E).

Exercice 19. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cos(\alpha x)$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Déterminer la série de Fourier de f. Expliciter l'écriture complexe.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Sf(x) = f(x)$.
5. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x\sin(\frac{x}{2}) + 2\cos(\frac{x}{2})$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Déterminer la série de Fourier de f.
4. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
5. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2 - 1)^2}$.

Exercice 21. Montrer que pour tout $x \in [0, 2\pi]$ on a $\displaystyle\frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

En déduire les valeurs des sommes

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et impaire définie sur $]0, \pi]$ par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.

3. Déterminer la série de Fourier de f.
4. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$? A-t-on convergence uniforme ?

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 2y = f(x) .$$

On suppose que (E) admet une solution particulière y_0 impaire, 2π-périodique et développable en série de Fourier : $y_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin(nx)$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\alpha_n = \dfrac{1}{n(2-n^2)}$.
6. En déduire la solution générale de (E).
7. Exprimer l'énergie totale du signal représenté par y_0 $E = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} y_0(x)^2 \, dx$ comme la somme d'une série numérique.

Exercice 23. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f\left(e^x \sin x, \ln(1+x^2)\right)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 24. On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$. On considère $\varphi : D \to D$ définie par

$$\varphi(x,y) = (u,v), \quad \text{avec } u = x,\ v = \frac{y}{x}.$$

1. Montrer que la fonction φ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ de D sur D ainsi que sa fonction réciproque.
2. A l'aide du changement de variables φ, résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + xy \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y.$$

3. Quelle est la solution de l'équation qui vérifie

$$f(1,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,y) = \sin(y) \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}?$$

Exercice 25. Résoudre en utilisant le changement de variable $x = u, y = uv$ l'Équation aux Dérivées Partielles (ÉDP) suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

sur le demi-plan $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\}$.

Exercice 26. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4y$$

1. En utilisant le changement de variables $u = x + y,\ v = x - y$, trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et solutions de l'équation (E).
2. Parmi les solutions trouvées en 1) quelle est celle qui vérifie les conditions supplémentaires

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x,x) = x^2 \text{ et } f(x,-x) = x^3.$$

Exercice 27. On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + 2u \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0 \qquad \text{pour tout } (u,v) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x,y) = (x, y + x^2)$.

1. En calculant l'application réciproque, montrer que ϕ est bijective. Vérifier que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Posons $g = f \circ \phi$.
   (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (b) Montrer que f est solution de (1) si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f vérifie (1) si et seulement s'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(u,v) = h(v - u^2)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 28. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$. On cherche les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ qui vérifient

$$(E) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in D.$$

1. Vérifier que $\varphi(x,y) = y/x$ est solution de (E).
2. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $g \circ \varphi$ est solution de (E).
3. Soit f une solution de (E). Montrer que $f(u, uv)$ ne dépend que de v.
4. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 29. On considère l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t), \quad \forall x \in]0, L[\text{ et } t > 0, \tag{EC}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $L > 0$. On impose les conditions aux limites

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \quad \text{pour tout } t \geqslant 0. \tag{CL}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $y(x,t) = e^{-n^2a^2\pi^2t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ est une solution de (EC) qui satisfait les conditions aux limites (CL).
2. Soit
$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2a^2\pi^2t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$
Comment choisir les coefficients b_n pour que $y(x,t)$ vérifie la condition initiale $y(x,0) = \varphi(x)$, où φ est une fonction donnée sur $]0, L[$?
3. Déterminer les coefficients b_n dans le cas $\varphi(x) = \sin(\frac{\pi x}{L})$.