Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Printemps 2026

FICHE TD 2 – Séries de fonctions. Séances 3-4.

Exercice 1. Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

$$(1) \qquad f_n(x) = \frac{x}{1+nx}\,, \qquad \text{sur } [0,1]\,,$$

$$(2) \qquad f_n(x) = \sin\left(\frac{nx}{1+nx}\right)\,, \qquad \text{sur } [0,+\infty[\,,$$

Exercice 2. Étudier la convergence simple et normale des séries de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, de terme général donné par :

$$(1) \quad f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}\,, \qquad \text{sur } \mathbb{R}\,.$$

Exercice 3. Étudier la nature des séries de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, de terme général donné par :

$$(1) \quad f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2}\,, \qquad \text{sur } [0,+\infty[$$

$$(2) \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}\,, \qquad \text{sur } \mathbb{R}\,.$$

Exercice 4. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit f_n par

$$f_n(x) = ne^{-nx}\,.$$

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Qu'en est-il de la convergence uniforme ? Utiliser la méthode de la sous-suite.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge normalement sur l'intervalle $[a,+\infty[$. On notera f sa somme.
4. Calculer une primitive de f.
5. En déduire une formule simple pour la valeur de $f(x)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 5. Calculer

$$\forall x \in]0,\pi[\,, \quad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sin(x)\cos^n(x)$$

et

$$\forall x > 0\,, \quad G(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}\,.$$

Exercice 6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}\,.$$

1. Montrer la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

2. Le série converge-t-elle simplement ? Converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$? On notera S sa somme, c'est à dire la fonction donnée par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
3. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée S' est donnée par

$$S'(x) = -2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 + x^2)^2} .$$

Exercice 7. On définit pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Montrer que ζ est bien définie et de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{1 + n + |x|} .$$

Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Exercice 9. Soit $I =]1, +\infty[$. Pour $x \in I$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^n} .$$

1. Montrer qu'on définit bien ainsi une fonction f sur I.
2. Montrer que f est continue sur I.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur I.

Exercice 10. Étudier la convergence éventuelle de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où

$$u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}.$$

Donner un équivalent de la somme quand $x \to 0, x \neq 0$.
(Indication : On pourra montrer et utiliser les inégalités de comparaison à une intégrale :

$$u_n(x) \geq \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \geq u_{n+1}(x).)$$

Exercice 11. Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit

$$f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x} , \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) .$$

1. Montrer que f est correctement définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ (Indication : on pourra comparer à une intégrale comme à l'exercice précédent) et quand $x \to +\infty$.