FICHE TD 1 – Révisions relations de comparaison. Suites de fonctions. Séances 1-2.

Exercice 1 1. Soit $f(x) = x^4 + \cos(x) + \frac{1}{x}$. Dire si $f(x) \sim_{x\to+\infty} g(x)$ pour

$$g(x) = x^4, \quad g(x) = 2x^4, \quad g(x) = x^4 + 1, \quad g(x) = x^4 + \frac{1}{x}.$$

2. En passant par un équivalent plus commode, calculer les limites des fonctions suivantes quand $x \to 0$:

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}, \quad g(x) = \frac{(\sin(2x))^2}{\sin(x)}, \quad h(x) = \frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)}, \quad i(x) = \frac{\exp\left(\frac{2}{\sin^2(x)}\right)}{\exp\left(\frac{1}{1-\cos(x)}\right)}.$$

3. Donner un équivalent quand $x \to +\infty$ de

$$f(x) = \frac{x^6 + \cos(x) + 1}{x^4 + x}, \quad g(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad h(x) = \frac{x^6 + \cos(x) + 1}{x^4 + x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 2 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x^{100}}{x^{101}}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-2} + \ln(x) + \sqrt{x}}{\pi\sqrt{x} + 1}, \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x.$$

Exercice 3 Donner un équivalent polynomial quand $x \to +\infty$ de

$$i(x) = \frac{x^6 + 1}{x^4 + x} - x^4 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Exercice 4 Donner un équivalent simple (avec un seul terme) des fonctions suivantes quand $x \to 0$ et quand $x \to +\infty$:

1. $f_1(x) = x + \cos x$,
2. $f_2(x) = x^2 + \sin x$,
3. $f_3(x) = \sqrt{x} + \ln x$,
4. $f_4(x) = x - e^x$,
5. $f_5(x) = x^4 + e^x$,
6. $f_6(x) = e^{2x} - \sqrt{x}$.

Exercice 5 Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

(1) $$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}, \quad \text{sur } [0,1],$$

(2) $$f_n(x) = \sin\left(\frac{nx}{1+nx}\right), \quad \text{sur } [0,+\infty[,$$

Exercice 6 Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

(1) $$f_n(x) = nx^2 e^{-nx}, \quad \text{sur } [0,\pi].$$

(2) $$f_n(x) = nx \; e^{-nx}, \quad \text{sur } [0,+\infty[.$$

Indication : rappelez-vous la méthode de la sous-suite (marche-t-elle ?)

Exercices supplémentaires

Exercice 7 Étudier la limite de f quand $x \to a$ lorsque

1. $f(x) = \frac{x^2+x-1}{2x(x-3)}$ et $a = +\infty$,
2. $f(x) = (\pi - 2x)\tan(x)$ et $a = \frac{\pi}{2}$,
3. $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^3+2x^2} - \frac{x^3-x}{\sqrt{x^4+x^3}}$ et $a = +\infty$,
4. $f(x) = \frac{x^2+3\ln(x)}{2x^2\sqrt{1+x}}$ et $a = +\infty$,
5. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln(x)-1}$ et $a = e$.

Exercice 8 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x + \ln(\cos x)}{x^4}$,
3. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$,
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$,
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$,
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$, $a \in \mathbb{R}^*$,
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$,
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}}$.

Exercice 9 Déterminer un développement limité ou asymptotique de f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{2+x}$ quand $x \to 0$, à l'ordre 3,
2. $f(x) = \ln(\sin x)$ quand $x \to \dfrac{\pi}{2}$, à l'ordre 3,
3. $f(x) = x^2 \ln x$ quand $x \to 1$ et à l'ordre 5,
4. $f(x) = \ln(2+x)$ quand $x \to 0$, à l'ordre 2,
5. $f(x) = \sin x$ quand $x \to \dfrac{\pi}{4}$, à l'ordre 3,
6. $f(x) = \sqrt{x^4+x+1}$ quand $x \to +\infty$ avec trois termes significatifs.

Exercice 10 Déterminer pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous un développement quand $x \to 0$ à la précision demandée :

1. $f(x) = e^{-x}$ avec une précision $O(x^3)$,
2. $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ avec une précision $O(x^3)$,
3. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x \sin x}$ avec une précision $O(x^2)$,
4. $f(x) = (1+x)^{1/x}$ avec une précision $O(x^3)$,
5. $f(x) = \ln(1+x^2)$ avec une précision $O(x^6)$,
6. $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2)$ avec une précision $O(x^3)$,
7. $f(x) = e^{3x}\sin(2x)$ avec une précision $O(x^3)$,
8. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ avec une précision $O(x^3)$,
9. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ avec une précision $O(x^3)$.

Exercice 11 Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{n2^{-x}+x}{n+x}.$$