

## Correction Contrôle Continu 1

**Exercice 1** (a) On a  $e^x \geq x$ . Donc  $e^{\frac{1}{t}} \geq \frac{1}{t}$ . Donc  $\int_0^1 e^{\frac{1}{t}} dt \geq \int_0^1 \frac{1}{t} dt = +\infty$ , le dernier par le critère de Riemann. L'intégrale est alors divergente.

$$(b) \text{ On a } \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} = 1$  la fonction  $\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$  est équivalent à  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  quand  $x$  tend vers 0. D'après le critère de Riemann  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < +\infty$  et donc aussi  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$  est convergente.

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{xx}}{\sqrt{x}(x+1)} = 1$  la fonction  $\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$  est équivalent à  $x^{-\frac{3}{2}}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . D'après le critère de Riemann  $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx < +\infty$  et donc aussi  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$  est convergente. L'intégrale  $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$  est donc convergente.

**Exercice 2** 1. Soit  $x > 1$ . Alors  $x^n$  tend vers  $+\infty$  si  $n$  tend vers  $\infty$ . Comme  $|\sin(x^n)| < 1$  ceci montre que  $f_n(x) \rightarrow 0$ .

Soit  $x < 1$ . Alors  $x^n$  tend vers 0 si  $n$  tend vers  $\infty$ . Comme  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$  on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n} = 1$ , ce qui montre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{\sin 1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2. On justifie qu'on peut échanger la limite avec l'intégrale : Soit  $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Comme  $\frac{|\sin(x^n)|}{|x^n|} \leq 1$  on a  $g(x) \geq |f_n(x)|$  pour tout  $x$  et  $n$ . De plus  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx < +\infty$ . D'après le théorème de la convergence dominée on peut donc échanger la limite avec l'intégrale pour obtenir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx = \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

**Exercice 3** Soit  $x = \phi(t) = \ln t$ . Alors,

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx = \int_{\phi^{-1}(-\infty)}^{\phi^{-1}(0)} \frac{e^{\phi(t)}}{\sqrt{e^{\phi(t)}+1}} \phi'(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t+1}} dt = [2\sqrt{t+1}]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1).$$