

Session 2: Mathématiques 4

26 Juin 2026, Durée: 1h30

Exercice 1

1) Est-ce que pour les **séries de fonctions** de terme général suivantes définies pour $n \geq 1$, on a convergence uniforme? **Justifier.** 2pt

$$u_n = \cos(nx), \quad x \in [0, 1].$$

Soit $x = 0$, alors $u_n(x = 0) = 1$, qu'est terme général d'une série numérique divergente. Donc la série de fonctions à terme générale u_n ne converge pas simplement sur $[0, 1]$ et donc ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

2) Est-ce que pour les **séries de fonctions** de terme général suivantes définies pour $n \geq 1$, on a convergence uniforme? **Justifier.** 2pt

$$v_n = x n^{-2}, \quad x \in [0, 1].$$

Pour $x \in [0, 1]$ fixé, la série est une série de Riemann convergente ($2 > 1$), donc la série de fonctions à terme générale v_n converge simplement. De plus, soit $\|v_n\| = \sup_{x \in [0, 1]} |v_n| = \frac{1}{n^2} < \infty$, qu'est terme général d'une série numérique convergente (critère de Riemann $2 > 1$). Donc la série de fonctions à terme générale v_n converge normalement sur $[0, 1]$ et donc converge aussi uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 2

1) Est-ce que les intégrales suivantes sont convergentes? **Justifier.** 2pt

$$\int_1^\infty f(x) dx, \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{x + \sin(x)}{x^2}.$$

On a f positive, continue et bornée sur $[1, \infty[$. Donc l'intégral est impropre en $x \rightarrow \infty$. De plus on a

$$f(x) = \frac{x + \sin(x)}{x^2} \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \quad (1)$$

Car $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ diverge (intégral de Riemann), aussi $\int_1^\infty f(x) dx$ diverge (théorème de comparaison II).

2) Est-ce que les intégrales suivantes sont convergentes? **Justifier.**

2pt

$$\int_1^\infty g(x) dx, \quad \text{avec} \quad g(x) = \frac{x^2}{e^x}.$$

On a $g(x)$ positive, continue et bornée sur $[1, \infty[$. Donc, l'intégral est impropre en $x \rightarrow \infty$. La fonction $x \mapsto \frac{g(x)}{1/x^2} = x^4 e^{-x}$ est également positive, continue et bornée sur $[1, \infty[$, et donc $g(x) =_{x \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\frac{1}{x^2})$. Car $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge (intégrale de Riemann), $\int_1^\infty g(x) dx$ converge également (théorème de comparaison II).

Remarque: De façon directe, on peut aussi calculer $\int_1^\infty g(x) dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c g(x) dx$ avec

$$\begin{aligned} \int_1^c g(x) dx &= \int_1^c x^2 e^{-x} dx = -[x^2 e^{-x}]_1^c + 2 \int_1^c x e^{-x} dx = -c^2 e^{-c} + e^{-1} - 2[x e^{-x}]_1^c + 2 \int_1^c e^{-x} dx \\ &= -c^2 e^{-c} + e^{-1} - 2c e^{-c} + 2e^{-1} - 2[e^{-x}]_1^c = -c^2 e^{-c} + e^{-1} - 2c e^{-c} + 2e^{-1} - 2e^{-c} + 2e^{-1} \\ &= 5e^{-1} - (c^2 + 2c + 2)e^{-c} \end{aligned} \quad (2)$$

Alors

$$\int_1^\infty g(x) dx = \lim_{c \rightarrow \infty} (5e^{-1} - (c^2 + 2c + 2)e^{-c}) = 5e^{-1} < \infty \quad (3)$$

3) Est-ce que les intégrales suivantes sont convergentes? **Justifier.**

2pt

$$\int_1^\infty h(x) dx, \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

h est positive, continue et bornée sur $[1, \infty[$. Donc, l'intégral est impropre en $x \rightarrow \infty$. La fonction $x \mapsto \frac{h(x)}{1/x^{3/2}} = \frac{\ln(x)}{x^{1/2}}$ est bornée pour $x \in [1, \infty[$, et donc $h(x) =_{x \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\frac{1}{x^{3/2}})$. Car $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge (intégrale de Riemann), $\int_1^\infty g(x) dx$ converge également (théorème de comparaison II).

Exercice 3

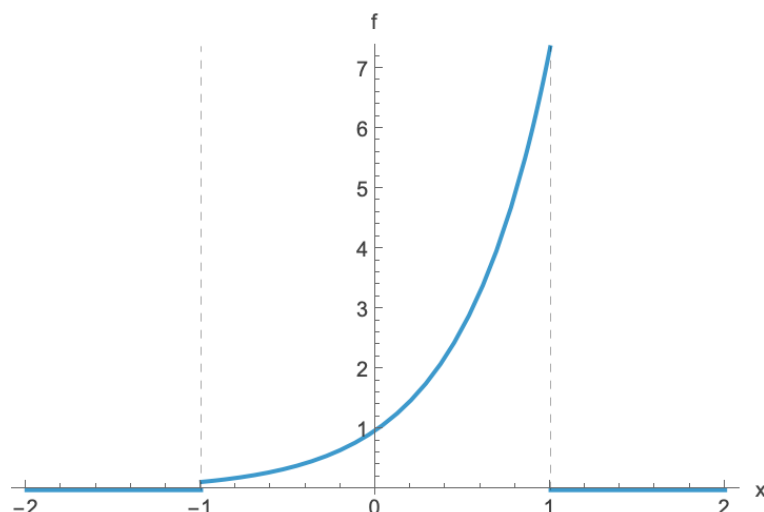
1) On rappelle que la transformée de Fourier de ϕ est donnée pour ϕ absolument intégrable par

$$\hat{\phi}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \phi(x) dx.$$

Tracer les graphes pour les fonctions suivantes et calculer la transformée de Fourier pour:

1pt graphe; 1pt $\hat{f}$

$$f(x) = e^{2x} \text{ si } x \in [-1, 1]; 0 \text{ sinon}$$



$$\begin{aligned}\hat{f}(p) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x) dx = \int_{-1}^1 e^{2x} e^{-ipx} dx = \int_{-1}^1 e^{(2-ip)x} dx = \left[\frac{e^{(2-ip)x}}{2-ip} \right]_{-1}^1 = \frac{e^{(2-ip)} - e^{-(2-ip)}}{2-ip} \\ &= \frac{2(2+ip)}{4+p^2} \sinh(2-ip).\end{aligned}\quad (4)$$

Remarque: $2 - ip \neq 0 \forall p \in \mathbb{R}$.

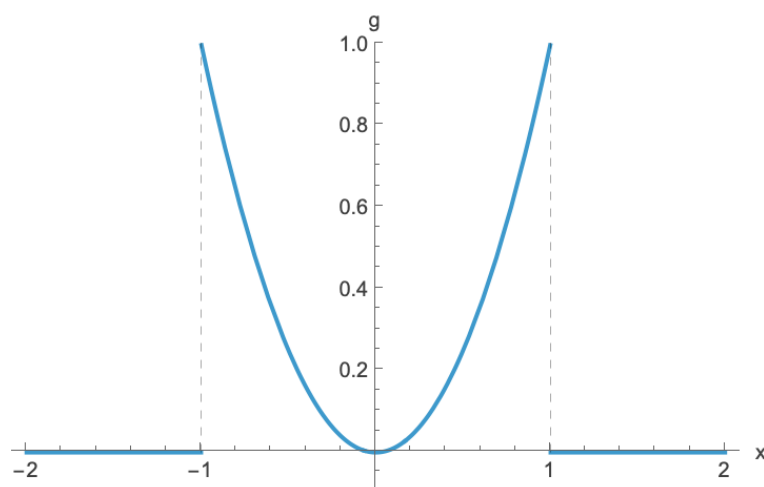
2) On rappelle que la transformée de Fourier de ϕ est donnée pour ϕ absolument intégrable par

$$\hat{\phi}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \phi(x) dx.$$

Tracer les graphes pour les fonctions suivantes et calculer la transformée de Fourier pour:

1pt graphe; 2pt $\hat{g}$

$$g(x) = x^2 \text{ si } x \in [-1, 1]; 0 \text{ sinon}$$



On commence par considerer $p \neq 0$: En utilisant $e^{-ipx} = \frac{i}{p} \frac{d}{dx} e^{-ipx}$ on peut fair deux integrations

par partie

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(p) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} g(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 e^{-ipx} dx = \left[\frac{ix^2}{p} e^{-ipx} \right]_{-1}^1 - \frac{2i}{p} \int_{-1}^1 x e^{-ipx} dx \\
 &= \frac{i(e^{-ip} - e^{ip})}{p} - \frac{2i}{p} \left(\left[\frac{ix}{p} e^{-ipx} \right]_{-1}^1 - \frac{i}{p} \int_{-1}^1 e^{-ipx} dx \right) \\
 &= \frac{2 \sin(p)}{p} - \frac{2i}{p} \left(\frac{i(e^{-ip} + e^{ip})}{p} + \frac{1}{p^2} [e^{-ipx}]_{-1}^1 \right) \\
 &= \frac{2 \sin(p)}{p} + \frac{4 \cos(p)}{p^2} - \frac{2i}{p^3} (e^{-ip} - e^{ip}) = \frac{2 \sin(p)}{p} + \frac{4 \cos(p)}{p^2} - \frac{4 \sin(p)}{p^3} \\
 &= \frac{2}{p^3} (p^2 - 2) \sin(p) + \frac{4}{p^2} \cos(p). \tag{5}
 \end{aligned}$$

Pour $p = 0$ on a

$$\hat{g}(p = 0) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = [x^3/3]_{-1}^1 = \frac{2}{3}. \tag{6}$$

Alors

$$\hat{g}(p) = \begin{cases} \frac{2}{p^3} (p^2 - 2) \sin(p) + \frac{4}{p^2} \cos(p) & \text{si } p \neq 0, \\ 2/3 & \text{si } p = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Remarque: Car

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{p^3} (p^2 - 2) \sin(p) + \frac{4}{p^2} \cos(p) &=_{p \rightarrow 0} \frac{2}{p^3} (p^2 - 2) \left(p - \frac{p^3}{6} + \mathfrak{o}(p^4) \right) + \frac{4}{p^2} \left(1 - \frac{p^2}{2} + \mathfrak{o}(p^3) \right) \\
 &= 2 - \frac{4}{p^2} + \frac{2}{3} + \mathfrak{o}(p) + \frac{4}{p^2} - 2 + \mathfrak{o}(p) = \frac{2}{3} + \mathfrak{o}(p)
 \end{aligned} \tag{8}$$

on a

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{2}{p^3} (p^2 - 2) \sin(p) + \frac{4}{p^2} \cos(p) \right) = \frac{2}{3}, \tag{9}$$

en fait $\hat{g}(p)$ est continue.

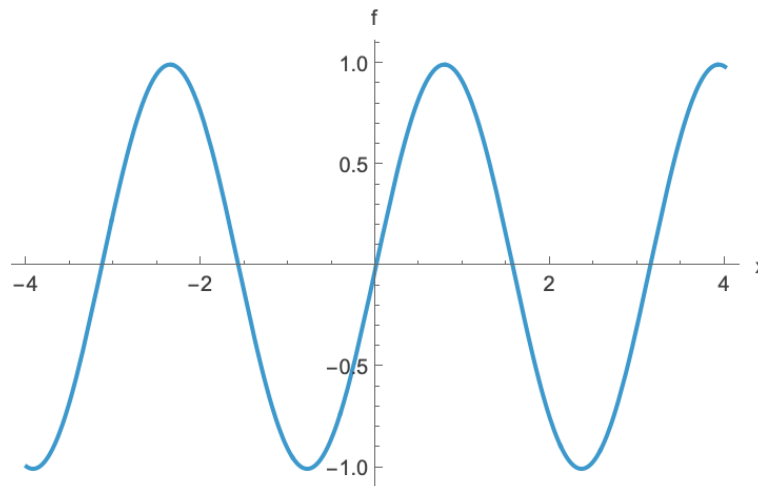
Exercice 4

1) On rappelle que les coefficients de Fourier de ϕ 2π -périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période (a quelconque) :

$$a_n(\phi) = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \cos(nx) \phi(x) dx, \quad b_n(\phi) = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \sin(nx) \phi(x) dx.$$

Tracer les graphes pour les fonctions 2π -périodiques suivantes puis calculer leurs coefficients de Fourier. 0.5pt graphe; 0.5pt coefficients

$$f(x) = \sin(2x).$$



On a directement

$$a_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2, \\ 0 & \text{si } n \neq 2 \end{cases} \quad (10)$$

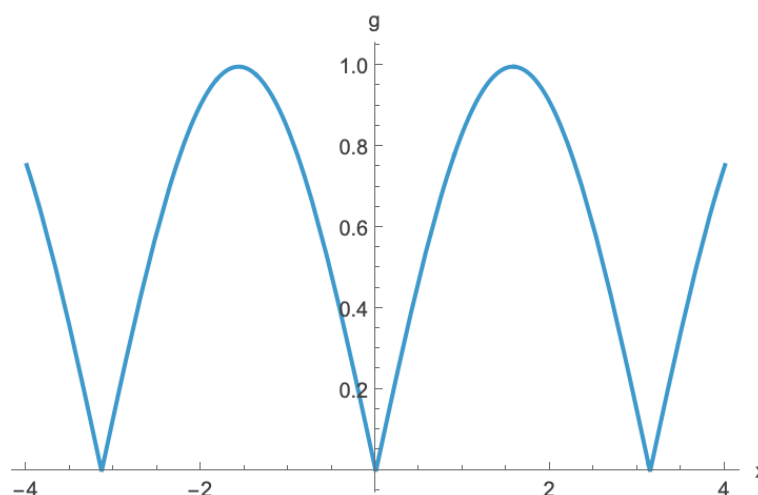
2) On rappelle que les coefficients de Fourier de ϕ 2π -périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période (a quelconque) :

$$a_n(\phi) = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \cos(nx) \phi(x) dx, \quad b_n(\phi) = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \sin(nx) \phi(x) dx.$$

Tracer les graphes pour les fonctions 2π -périodiques suivantes puis calculer leurs coefficients de Fourier.

1pt graphe; 3pt coefficients

$$g(x) = |\sin(x)|.$$



Car g est pair on a $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Pour les a_n on fait le choix $a = -\pi$

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) |\sin(x)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) \sin(x) dx \quad (11)$$

En utilisant

$$\sin(A) \cos(B) = \frac{1}{2} \sin(A+B) + \frac{1}{2} \sin(A-B) \quad (12)$$

on a donc

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin((1+n)x) + \sin((1-n)x)) dx \quad (13)$$

Donc, il faut distinguer

- $n = 1$

$$a_1(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(2x)) dx = -\frac{1}{2\pi} [\cos(2x)]_0^\pi = 0. \quad (14)$$

- $n \neq 1$

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin((1+n)x) + \sin((1-n)x)) dx = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos((n+1)\pi) - 1}{n+1} - \frac{\cos((n-1)\pi) - 1}{n-1} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1} \right) = -\frac{((-1)^{n+1} - 1)}{\pi} \frac{n-1-n-1}{n^2-1} \\ &= -\frac{2(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Donc on a

$$b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{4}{(1-4k^2)\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (16)$$