Outils (plus ou moins) nouveaux essentiels discrets

1. Notations o et $\sim$ (révisions).
2. Nouvelle notation O.
3. Suites numériques (révisions).
4. Séries numériques (révisions).
5. Suites de fonctions.
6. Séries de fonctions.
7. Séries de Fourier : formules coefficients.
8. Séries de Fourier : $Sf(x)$ et $f(x)$.
9. Séries de Fourier : Parseval-Bessel.

Notations o et $\sim$

La notation $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de a signifie que f est égal au produit de g et de quelque chose qui tend vers 0 quand x tend vers a. En particulier, quand g ne s'annule pas près de a, cela revient à dire que f/g tend vers 0 quand x tend vers a.

La notation $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a signifie que f est égal au produit de g et de quelque chose qui tend vers 1 quand x tend vers a. En particulier, quand g ne s'annule pas près de a, cela revient à dire que f/g tend vers 1 quand x tend vers a.

Exemples au voisinage de 0 :
$x^3 = o(x^2)$; $\ln(x) = o(1/x)$; $x^4 = o(\sin(x) - x)$.

Exemples au voisinage de $+\infty$:
$\ln(\ln(x)) = o(\ln(x))$; $e^x = o(xe^x)$; $\sin(x) = o(x^2)$.

Nouvelle notation O

Ce n'est pas beaucoup plus dur que les autres...moralement cela veut dire qu'au lieu de tendre vers 0 ou 1, f/g a juste besoin de rester borné.
La notation $f(x) = O(g(x))$ au voisinage de a signifie que f est égal au produit de g et de quelque chose qui reste borné quand x tend vers a.
En particulier, quand g ne s'annule pas près de a, cela revient à dire que f/g reste borné quand x tend vers a. Mais personne ne dit que f/g a une limite bornée !

Si $f \sim g$ ou $f = o(g)$, alors $f = O(g)$.

Exemples : $x - \sin(x) =_0 O(x^3)$; $1 - cos(x) =_0 O(x^2)$; $10x^2 =_0 O(x)$

$x \sin(x) = O(x)$ (au voisinage de n'importe quel point !)

$\ln(x) =_1 O(x-1)$; $2x^2 + 1 =_\infty O(x^2)$.

A quoi sert la nouvelle notation grand O ?

Le terme de domination est trompeur : par exemple x domine $2x$ (en 0 comme à l'infini).
L'intérêt est que les théorèmes de comparaison pour la convergence de séries se réecrivent plus facilement. Plus concrètement, si $u_n, v_n \geq 0 \forall n$ et si $u_n = O(v_n)$:

$$\sum v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

et réciproquement :

$$\sum u_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge.}$$

On peut procéder de même pour réecrire les résultats de comparaison vus pour les intégrales.

Suites numériques (révisions)

Pour les suites numériques, on regarde u_n pour $n \geq n_0$ quand $n \to +\infty$ et on ne somme personne.

Exemples et méthodes à bien connaître :

- Suite géométrique : z^n converge si et seulement si $|z| < 1$ (vers 0) ou $z = 1$ (vers 1).
- Comparaison : si u_n tend vers 0 et $v_n = O(u_n)$, v_n tend aussi vers 0.
- Croissance comparée : plein d'exemples :

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}; \quad \frac{e^{n^2}}{n^5}; \quad \frac{e^n + n^3}{e^{n+1} - n}; \quad \frac{2n - \sqrt{n}}{n + \ln(n)}; \quad \frac{n^2}{n^2 \ln(n)}.$$

Séries numériques (révisions)

Pour les séries numériques, on prend a_n pour $n \geq n_0$ et on regarde ce que fait la somme $S_n = a_{n_0} + \cdots + a_n$ quand $n \to +\infty$. Exemples et méthodes à bien connaître :

- Série géométrique : $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$.
- Série de Riemann : $\sum 1/n^a$ converge si et seulement si $a > 1$.
- Comparaison : si $\sum u_n$ converge absolument et $v_n = O(u_n)$, alors $\sum v_n$ converge absolument.
- Les critères de d'Alembert et Cauchy (qui peuvent être réecrits comme une comparaison asymptotique entre a_n et l^n).

Exemples :

$$\sum sin(2^{-n});\ \sum \frac{3^n}{(n!)^2};\ ;\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Suites de fonctions

La convergence simple veut juste dire que pour chaque x fixé, la suite numérique $a_n(x)$ converge vers une limite $a(x)$.
La convergence uniforme signifie que $a(x) - a_n(x)$ tend vers 0 uniformément en x. En d'autres mots, on peut trouver une suite numérique M_n qui tend vers 0 telle que :

$$|a(x) - a_n(x)| \leq M_n, \ \forall x, n.$$

C'est la condition pour les théorèmes de passage à la limite.
Exemples avec $I =]0, +\infty[$ puis $J = [1, +\infty[$:

$$\frac{nx}{nx+1}; \ \frac{x^n}{x^n+1}.$$

La, cela se complique. Il y a 3 notions de convergence, de la moins à la plus forte :

- La convergence simple signifie juste que pour chaque x fixé, la série numérique $\sum u_n(x)$ converge.
- La convergence uniforme signifie que, en plus de la convergence simple, la suite de fonctions :

$$R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} u_k(x)$$

tend vers 0 uniformément en x (voir transparent précédent).
C'est la condition pour les théorèmes de passage à la limite.
- La plus forte est la convergence normale. Maintenant, on demande que la série numérique des normes :

$$\sum \|u_n\|_\infty$$

converge. On rappelle que $\|u\|_\infty := \sup_x |u(x)|$.

Exemples avec $I =]0, +\infty[$ puis $J = [1, +\infty[$: $\frac{1}{(x+1)^n}$; $\frac{1}{n^3 x}$.

Séries de Fourier : formules coefficients.

On suppose toujours que les fonctions étudiées sont T-périodiques et C^1 par morceaux.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\,dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\,dx.$$

Séries de Fourier : $Sf(x)$ et $f(x)$.

On note la somme Sf :

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Cette somme converge toujours simplement vers $(f(x^-) + f(x^+))/2$, donc si f est continue vers $f(x)$.

Séries de Fourier : Parseval-Bessel.

On a :

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)^2\ dx.$$

Avec le contenu du transparent d'avant, il s'agit de deux égalités qui permettent de calculer la valeur exacte de beaucoup de sommes.

Exemple Fourier

On prend $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi]$ et on la périodise.

- Calculer les a_n et b_n.
- Ecrire la somme $Sf(x)$. Quand est-elle égale à $f(x)$?
- Calculer la somme $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
- Calculer la somme $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k^2}$.

Outils (plus ou moins) nouveaux essentiels continus

1. Intégrales et convergence absolue (révisions).
2. Intégrales impropres.
3. Intégrales à paramètre.
4. Décomposition en éléments simples (révisions).
5. Transformée de Laplace.
6. Produit de convolution.
7. Transformée de Fourier.

Intégrales et convergence absolue.

Ici et dans la suite, toutes les fonctions sont supposées continues par morceaux. Lorsque nous intégrons une fonction f sur un intervalle I, on a deux situations possibles :

- Si $\int_I |f|$ est finie (l'intégrale converge absolument, alors $\int_I f$ est bien définie.
- Si $\int_I |f|$ est infinie, il faut voir dans quelles situations nous pouvons quand même donner un sens à $\int_I f$.

Intégrales impropres.

Regardons une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Si f et I sont bornés, tout va bien. Il y a deux types de soucis possibles :

- f n'est pas bornée près de (au moins) une des bornes de l'intervalle.
- L'intervalle lui-même n'est pas borné.

Dans les 2 cas, il faut approcher les bornes de I et regarder la limite (s'il y a un souci à chaque borne, on coupe au milieu et on regarde chaque limite séparément).

Exemples :

$$\int_0^1 \ln(x+x^2); \int_0^{+\infty} \sin(x)/x \, dx.$$

On regarde :

$$f(p) := \int_I F(p,x)\ dx.$$

Sous des hypothèses de domination sur F uniformément en p par une fonction absolument intégrable sur I, on obtient que f est (au moins) aussi régulière que F.

Décomposition en éléments simples (révisions).

Formules longues à écrire, en particulier si décompositions réelles...mais dans tous les cas, si le dénominateur est de degré n, alors il y a un système avec n équations et n inconnues.

Exemples :

$$\frac{X}{(X^2-1)^2};\ \frac{X}{X^2+2X+2}.$$

Transformée de Laplace.

Il s'agit d'une l'intégrale à paramètre :

$$L[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx.$$

Les formulations sont un peu longues, mais en tout cas vous pouvez le calculer pour $p > A$ si $f(x) = O(e^{Ax})$ à l'infini.

Exemples pour trouver $L[f](p)$:

$$f(x) = e^x;\ f(x) = \cos(x).$$

Exemples pour trouver f(x) en partant d'une fraction rationnelle :

$$L[f](p) = \frac{2}{p^2+1};\ L[f](p) = \frac{2}{p^2-1}.$$

Transformée de Fourier.

Il s'agit encore une fois d'une intégrale à paramètre :

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x) dx.$$

Par rapport à la transformée de Laplace, il y a un i en plus et on a changé les bornes.
C'est un objet compliqué, mais en tout cas vous pouvez le calculer si f est absolument intégrable.
Exemples pour trouver $\hat{f}(p)$:

$$f(x) = e^{-|x|};\ f(x) = x1_{[-1,1]}(x).$$

Merci de votre attention !