

Cours 11. Séries de Fourier: notions sur les équations aux dérivées partielles (ÉDP).

Mathématiques 4

Printemps 2026

La propagation d'une onde sur une **corde infinie** est modélisée par l'équation des ondes sur \mathbb{R}

$$(EO1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions u_0 et u_1 sont respectivement, l'état et la vitesse initiaux (**conditions initiales**).

Remarque

L'équation étant d'ordre *deux* en temps en temps, il est naturel d'imposer les *deux* conditions initiales u_0 et u_1 en $t = 0$.

Théorème 1 (Formule de D'Alembert)

Supposons que u_0 est de classe C^2 sur \mathbb{R} et que u_1 est de classe C^1 sur \mathbb{R} . Alors il existe une unique solution de (EO1) donnée par

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(u_0(x + ct) + u_0(x - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy .$$

Cette expression est parfois appelée **formule de D'Alembert**.

Équation des ondes : conditions aux limites

On s'intéresse maintenant à la propagation d'une onde sur une **demi-corde (infinie)**. Elle est modélisée par l'équation des ondes avec une condition de frontière :

$$(EO2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x > 0, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad \forall x > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \forall t > 0, \end{array} \right.$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions u_0 et u_1 sont respectivement, l'état et la vitesse initiale. Physiquement, la condition de frontière s'interprète comme une paroi réfléchissante. Si les conditions initiales u_0 et u_1 dans (EO2) sont les restrictions de fonctions paires définies sur tout \mathbb{R} pour lesquelles le Théorème 1 et donc la formule de d'Alembert s'appliquent, on peut tirer profit de ce théorème pour résoudre également (EO2).

Équation des ondes : solutions à variables séparées

Dans une géométrie adaptée, la **séparation des variables** consiste à chercher des solutions où on "sépare" les variables x et t , en écrivant

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

On cherche donc les solutions qu'on appelle à **variables séparées** de l'équation des ondes. On suppose donc qu'il existe des fonctions F et G telles que

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

On a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = FG'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

et en remplaçant dans l'équation, on obtient

$$FG'' = c^2 F''G.$$

Équation des ondes : solutions à variables séparées

En supposant en plus que $F(x) \neq 0$ et $G(t) \neq 0$, on obtient

$$c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)}.$$

Comme la fonction de gauche dépend uniquement de x et celle de droite uniquement de t , il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que

$$c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda, \quad \frac{G''(t)}{G(t)} = \lambda.$$

Donc on obtient les équations différentielles linéaires ordinaires suivantes :

$$c^2 F''(x) - \lambda F(x) = 0,$$

$$G''(t) - \lambda G(t) = 0.$$

Équation des ondes : solutions à variables séparées

On distingue alors les trois cas suivants :

- si $\lambda = 0$, alors

$$F(x) = ax + b, \quad G(t) = \alpha t + \beta.$$

- si $\lambda > 0$, alors

$$F(x) = ae^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + be^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}, \quad G(t) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}t} + be^{-\sqrt{\lambda}t}.$$

- si $\lambda < 0$, alors

$$F(x) = a \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) + b \sin\left(-\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right),$$

$$G(t) = a \cos(\sqrt{-\lambda}t) + b \sin(\sqrt{-\lambda}t).$$

En tenant compte des conditions initiales et des conditions aux limites, on détermine le cas qui se produit et les solutions de l'équation.

Équation de Laplace, Équation de Poisson

On considère l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0,$$

et l'équation de Poisson

$$\Delta u = \rho.$$

Équation de Laplace : solutions à variables séparées

On cherche des solutions de l'équation de Laplace

$$\Delta u(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

à variables séparées. On suppose donc qu'il existe deux fonctions $F(x)$ et $G(y)$ telles que

$$u(x, y) = F(x)G(y).$$

En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0$$

et il existe donc une constante λ telle que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda = -\frac{G''(y)}{G(y)}.$$

Équation de Laplace : solutions à variables séparées

Comme dans le cas des équations des ondes, on distingue alors les trois cas suivants :

- si $\lambda = 0$, alors

$$F(x) = ax + b, \quad G(y) = \alpha y + \beta.$$

- si $\lambda > 0$, alors

$$F(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad G(y) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}y) + \beta \sin(-\sqrt{\lambda}y).$$

- si $\lambda < 0$, alors

$$F(x) = a \cos(\sqrt{-\lambda}x) + b \sin(\sqrt{-\lambda}x),$$

$$G(y) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}y} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}y}.$$

En tenant compte des conditions initiales, on détermine le cas qui se produit et les solutions de l'équation.

Équation de la chaleur

On s'intéresse à l'équation de la chaleur avec condition initiale sur tout \mathbb{R}

$$(EC1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et l'équation de la chaleur sur $[0, +\infty[$ avec condition au bord en $x = 0$

$$(EC2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x > 0, \quad \forall t > 0, \\ u(0, t) = u_0(t), & \forall t > 0, \end{cases}$$

Remarque

L'équation étant d'ordre 1 en temps, il est naturel de n'imposer qu'une seule condition initiale u_0 en $t = 0$ dans (EC1).

Grâce aux séries de Fourier, on peut démontrer le résultat suivant :

Théorème 3

Soient $c > 0$ et $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 par morceaux, continue et 2π -périodique. Alors il existe une unique solution u de (EC1) vérifiant

- pour tout $t > 0$, $u(x, t)$ est 2π -périodique comme fonction en x ,
- la dérivée partielle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial t}$) existe et est continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$,
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t) - u_0(x)| = 0$.

Cette dernière propriété dit exactement que, posant $u_t : x \mapsto u(x, t)$, on a $u_t \rightarrow u_0$ uniformément sur \mathbb{R} quand $t \rightarrow 0^+$.

Théorème 4

Soient $c > 0$ et $u_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 par morceaux, continue et 2π -périodique. Alors il existe une unique solution u de (EC2) vérifiant

- pour tout $x > 0$, $u(x, t)$ est 2π -périodique comme fonction en t ,
- la dérivée partielle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial t}$) existe et est continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sup_{t > 0} |u(x, t) - u_0(x)| = 0$.

L'équation de Schrödinger (I)

Étant donnée une condition initiale $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on veut maintenant résoudre l'équation de Schrödinger homogène sur tout \mathbb{R} , d'inconnue $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & \text{pour } t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = v(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{ES})$$

On raisonne formellement comme au début de ce cours, posant $u_t(x) = u(t, x)$. Supposons qu'une solution admette une transformée de Fourier en la variable d'espace x pour tout temps $t \geq 0$ (par exemple u_t est intégrable, i.e. est dans $L^1(\mathbb{R})$).

L'équation de Schrödinger (II)

Alors, pour p fixé, $\widehat{u}_t(p)$ va vérifier une équation différentielle de variable t . En effet, on écrit pour $t \in]0, +\infty[$

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}_t(p) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-ipx} dx \stackrel{2}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) e^{-ipx} dx \quad (\text{ED2})$$

$$= \frac{\widehat{\partial u}}{\partial t}(t, p) \stackrel{4}{=} -i \frac{\widehat{\partial^2 u}}{\partial x^2}(t, p) \stackrel{5}{=} ip^2 \widehat{u}_t(p). \quad (1)$$

L'égalité 2 est la dérivation de l'intégrale à paramètre t (p fixé), l'égalité 4 suit de $i \times (\text{ES})$ et l'égalité 5 de la double application de la formule pour la transformée de Fourier d'une dérivée en la variable spatiale x .

L'équation de Schrödinger (III)

Donc ajoutant la condition initiale $\widehat{u}_0(p) = \widehat{v}(p)$ à l'équation différentielle (ED2) de variable t (toujours pour p fixé), on obtient $\widehat{u}_t(p) = e^{ip^2 t} \widehat{v}(p)$. En particulier, comme $p^2 t$ est réel, $|\widehat{u}_t(p)| = |\widehat{v}(p)|$. Ainsi, utilisant aussi le théorème de Plancherel l'énergie $\int_{\mathbb{R}} |u_t(x)|^2 dx$ est indépendante du temps car

$$\int_{\mathbb{R}} |u_t(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}_t(p)|^2 dp = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{v}(p)|^2 dp = \int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 dx.$$

L'équation de Schrödinger (IV)

Comme pour l'équation de la chaleur, cette formule multiplicative en Fourier suggère que la solution soit donnée pour $t > 0$ par une convolution. Il s'avère que c'est bien le cas

$$u(t, x) = \frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} v(x - y) e^{-i\frac{y^2}{4t}} dy.$$

Remarquons tout d'abord qu'on peut formellement écrire le noyau

$\frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{4\pi t}} e^{-i\frac{y^2}{4t}}$ avec lequel on convole la condition initiale v comme $g_{\sqrt{-2it}}(y)$. Concernant le sens de cette intégrale, remarquez également qu'il s'agit d'une intégrale oscillante, dont on a essentiellement vérifié la convergence pour $v \equiv 1$ et $t = \frac{1}{4}$.

Le principe d'incertitude (I)

En physique, ce principe donne une limitation théorique à la précision à laquelle on peut connaître à la fois la position et la quantité de mouvement d'une particule.

Étant donnée une particule dont la position suit une densité de probabilité f , alors la position moyenne de la particule est donnée par l'espérance $x_0 := \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx \in \mathbb{R}$. Une façon de mesurer alors l'écart moyen de cette particule par rapport à cette position moyenne est donné par la variance ou incertitude donnée par $\sigma^2 := \int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 f(x)dx$. Essentiellement, $\sigma = 0$ dans la cas déterministe d'une particule en x_0 avec probabilité 1, i.e. $f = \delta_{x_0}$.

Le principe d'incertitude (II)

En physique quantique, si cette distribution de position est donnée en général par $f(x) = |\psi(x)|^2$, alors la distribution du moment est donnée par $|\hat{\psi}(p)|^2/(2\pi)$ de sorte que la variance ou incertitude du moment est donnée par $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (p - p_0)^2 |\hat{\psi}(p)|^2 dp$ où $p_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} p |\hat{\psi}(p)|^2 dp$. Dans la suite, on prendra pour simplifier $x_0 = p_0 = 0$. Attention que les constantes explicites apparaissant dans cette section dépendent de la normalisation (souvent différente en physique) choisie pour définir la transformée de Fourier. D'autre part, dans ces applications en physique quantique, la constante de Planck \hbar joue un rôle dimensionnel, mais elle n'apparaît pas en général dans les énoncés mathématiques où l'on préfère travailler en variables adimensionnées.

Nous avons déjà évoqué le principe (vague pour l'instant) suivant : plus une fonction est localisée, plus sa transformée de Fourier est "étalée". Par exemple, nous avons vu que la transformée de Fourier d'une indicatrice $\frac{1}{2}1_{[-1,1]}$ est la fonction sinc qui ne décroît pas très vite vers 0 au sens où elle n'est pas intégrable en $\pm\infty$. Une autre manifestation plus quantitative de ce principe est le point concernant le changement d'échelle : pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ donnée, si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

pour $\varepsilon > 0$, alors $\widehat{f}_\varepsilon(p) = \widehat{f}(\varepsilon p)$. Dans le cas où $\int_{\mathbb{R}} f = 1$, nous avons vu que $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon = 1$ également et que les f_ε se concentrent en 0 au sens où $f_\varepsilon \rightarrow \delta_0$ au sens des mesures quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Le changement d'échelle donne alors que les \widehat{f}_ε s'étalent au sens où $\widehat{f}_\varepsilon \rightarrow \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f = 1$ simplement sur \mathbb{R} . À la limite, on retrouve la propriété que la transformée de Fourier d'une mesure δ_0 de Dirac supportée en un seul point est la fonction constante égale à 1 partout.

Notation : on note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide, c'est à dire telles que toutes les fonctions $x \mapsto |\psi^{(k)}(x)|(1 + |x|^2)^{\frac{m}{2}}$ sont bornées sur \mathbb{R} pour tout $m, k \in \mathbb{N}$. Ces propriétés de décroissance/régularité et les formules calculatoires vues sur la transformée de Fourier assurent que

$$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

On peut alors formaliser l'intuition ci-dessus dans le théorème suivant (en regardant les variances dans le cas de la position et du moment nuls en moyenne).

Théorème

[Principe d'incertitude d'Heisenberg] Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx \right)^2 \leq \frac{2}{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} p^2 |\hat{\psi}(p)|^2 dp \right).$$

De plus, on a égalité si et seulement si $\psi(x) = ae^{-bx^2}$ pour des constantes $a \in \mathbb{C}$ et $b > 0$ données.

Démonstration (I)

On peut tout d'abord observer que, pour $b \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-bx^2}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si $b > 0$.

On commence par intégrer par parties en écrivant

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \overline{\psi(x)} dx = [x|\psi(x)|^2]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} x (\psi'(x) \overline{\psi(x)} + \psi(x) \overline{\psi'(x)}) dx \\ &= 0 + 2 \int_{\mathbb{R}} -\operatorname{Re} (x\psi(x)\overline{\psi'(x)}) dx, \end{aligned} \quad (2)$$

en observant que

$$\left(\psi(x) \overline{\psi(x)} \right)' = (\psi'(x) \overline{\psi(x)} + \psi(x) \overline{\psi'(x)}) = 2\operatorname{Re} (\psi(x) \overline{\psi'(x)}),$$

que $x|\psi(x)|^2 \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$, car $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ implique que $x \mapsto x^2|\psi'(x)|^2$ est bornée sur \mathbb{R} , et remarquant enfin que x est réel.

Démonstration (II)

Indépendamment, on peut écrire

$$\left| \int_{\mathbb{R}} -\operatorname{Re} (x\psi(x)\overline{\psi'(x)}) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |-\operatorname{Re} (x\psi(x)\overline{\psi'(x)})| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)\overline{\psi'(x)}| dx \quad (3)$$

utilisant d'abord $|\int f| \leq \int |f|$, puis que $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Maintenant, utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)\overline{\psi'(x)}| dx \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx \right). \quad (4)$$

Enfin, on utilise le Théorème de Plancherel, puis la formule sur la transformée de Fourier d'une dérivée $\widehat{\psi'}(p) = ip\widehat{\psi}$ pour écrire

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi'}(p)|^2 dp = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |ip\widehat{\psi}(p)|^2 dp. \quad (5)$$

En mettant (2), (3), (4) et (5) bout à bout, on obtient bien l'inégalité souhaitée.

Démonstration (III)

Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mesurables, la fonction polynômiale de degré 2 :

$$\begin{aligned} t &\mapsto \int_{\mathbb{R}} (|f(x)| + t|g(x)|)^2 dx \\ &= t^2 \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx + 2t \int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

est positive sur \mathbb{R} , donc a au plus une racine et son discriminant $\Delta \leq 0$:

$$4 \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| dx \right)^2 - 4 \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right) \leq 0,$$

pour peu que toutes les intégrales convergent.

Exercice

En inspectant les cas d'égalité de toutes les inégalités de la preuve ci-dessus, montrer qu'on a égalité seulement si c réel et < 0 tel que $\psi'(x) = cx\psi(x)$, puis que $\psi(x) = ae^{-bx^2}$ avec $c = -2b$ et $a \in \mathbb{C}$.

MERCI DE VOTRE ATTENTION !