

Cours 10. Séries de Fourier: notions sur les équations aux dérivées partielles (ÉDP).

Mathématiques 4

Printemps 2026

Pour étudier un certain nombre de phénomènes, on peut utiliser une version locale des lois de la physique : mécanique (classique, quantique, relativiste), électromagnétisme, acoustique, thermodynamique etc.

Cette étude aboutit généralement à une modélisation mathématique des différents phénomènes utilisant des équations différentielles ordinaires (souvent raccourci en ÉDO ou EDO) ou des *Équations aux Dérivées Partielles* (souvent raccourci en ÉDP ou EDP).

Définition 1

Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Si la limite

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h},$$

existe (et est finie), on l'appelle la **i-ème dérivée partielle de f** au point $(a_1, \dots, a_n) \in D$ et on la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)$.

Si pour tout $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$, f admet une i-ème dérivée partielle au point \bar{a} , l'application $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \bar{a} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)$ est appelée la **i-ème dérivée partielle de f** (ou la dérivée partielle par rapport à la variable x_i). Si toutes ces fonctions sont continues, on dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur D .

Quelques rappels

Exemple 1

Considérons la fonction $f(x, y) = xy$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)b - ab}{h} = b, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(b+h) - ab}{h} = a.$$

Remarque

Dans la pratique, pour calculer une dérivée partielle par rapport à la variable x_i , on fixe les autres variables et on calcule la dérivée usuelle à une variable où la variable est x_i . Dans l'exemple précédent,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (xy)' \text{ (où } y \text{ est considérée comme une constante)} = y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (xy)' \text{ (où } x \text{ est considérée comme une constante)} = x.$$

Définition 2

Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Si toutes les dérivées partielles de f existent en un point $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$, alors on appelle **gradient de f au point \bar{a}** le vecteur

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \right)$$

Exemple 1 (suite)

On a

$$\nabla f(a, b) = (b, a).$$

Définition 3

La **dérivée partielle de f d'ordre j** par rapport aux variables x_{i_1}, \dots, x_{i_j} est définie par

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{j-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_j}} \right).$$

Exemple 2

Considérons la fonction $f(x, y) = x^4 + y^3$. Alors, les dérivées d'ordre 2 sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = 6y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0.$$

Quelques rappels

De façon itérative, si toutes les dérivées partielles d'ordre $k \in \mathbb{N}$ de f existent et sont continues sur tout D , on dit que f est de classe \mathcal{C}^k sur D .

Revoyez le lemme de Schwarz vue en Math 2 (si f assez régulière, on peut prendre les dérivées partielles dans n'importe quel ordre).

Définition 4

Le **laplacien** d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est donné par

$$\Delta f(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}).$$

Composition des fonctions de plusieurs variables

Proposition 5 (Règle de la chaîne)

Soient $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles et $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$ une application dérivable. Alors, l'application $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par la composition $g(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ est dérivable et

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt},$$

où les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont calculées en $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ et les $\frac{dx_i}{dt}$ en t .

Attention

C'est un cas particulier de la multiplication des jacobiniennes vue en Math 2.

Exercice (ai-je bien compris ?)

Soit f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x, x)$. (Indication : ce n'est **pas** $2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, x)$.)

Une **équation aux dérivées partielles** d'ordre m est une relation entre une fonction de plusieurs variables $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et ses dérivées partielles :

$$F\left(\bar{x}, u, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}\right) = 0. \quad (E)$$

Le plus souvent, le problème est posé sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^n$. On cherche des applications $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E) et satisfaisant des **conditions sur le bord ∂D** (on parle aussi de **conditions initiales** lorsque l'une des variables représente le temps).

Équation des ondes

La propagation d'une onde sur une **corde infinie** est modélisée par l'équation des ondes sur \mathbb{R}

$$(EO1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions u_0 et u_1 sont respectivement, l'état et la vitesse initiaux (**conditions initiales**).

Remarque

L'équation étant d'ordre *deux* en temps en temps, il est naturel d'imposer les *deux* conditions initiales u_0 et u_1 en $t = 0$.

Théorème 1 (Formule de D'Alembert)

Supposons que u_0 est de classe C^2 sur \mathbb{R} et que u_1 est de classe C^1 sur \mathbb{R} . Alors il existe une unique solution de (EO1) donnée par

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(u_0(x + ct) + u_0(x - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy.$$

Cette expression est parfois appelée **formule de D'Alembert**.

Équation des ondes : conditions aux limites

On s'intéresse maintenant à la propagation d'une onde sur une **demi-corde (infinie)**. Elle est modélisée par l'équation des ondes avec une condition de frontière :

$$(EO2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x > 0, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad \forall x > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \forall t > 0, \end{array} \right.$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions u_0 et u_1 sont respectivement, l'état et la vitesse initiale. Physiquement, la condition de frontière s'interprète comme une paroi réfléchissante. Si les conditions initiales u_0 et u_1 dans (EO2) sont les restrictions de fonctions paires définies sur tout \mathbb{R} pour lesquelles le Théorème 1 et donc la formule de d'Alembert s'appliquent, on peut tirer profit de ce théorème pour résoudre également (EO2).

Équation des ondes : solutions à variables séparées

Dans une géométrie adaptée, la **séparation des variables** consiste à chercher des solutions où on "sépare" les variables x et t , en écrivant

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

*On cherche donc les solutions qu'on appelle à **variables séparées** de l'équation des ondes.* On suppose donc qu'il existe des fonctions F et G telles que

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

On a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = FG'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

et en remplaçant dans l'équation, on obtient

$$FG'' = c^2 F''G.$$

Équation des ondes : solutions à variables séparées

En supposant en plus que $F(x) \neq 0$ et $G(t) \neq 0$, on obtient

$$c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)}.$$

Comme la fonction de gauche dépend uniquement de x et celle de droite uniquement de t , il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que

$$c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda, \quad \frac{G''(t)}{G(t)} = \lambda.$$

Donc on obtient les équations différentielles linéaires ordinaires suivantes :

$$c^2 F''(x) - \lambda F(x) = 0,$$

$$G''(t) - \lambda G(t) = 0.$$

Équation des ondes : solutions à variables séparées

On distingue alors les trois cas suivants :

- si $\lambda = 0$, alors

$$F(x) = ax + b, \quad G(t) = \alpha t + \beta.$$

- si $\lambda > 0$, alors

$$F(x) = ae^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + be^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}, \quad G(t) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}t} + be^{-\sqrt{\lambda}t}.$$

- si $\lambda < 0$, alors

$$F(x) = a \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) + b \sin\left(-\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right),$$
$$G(t) = a \cos\left(\sqrt{-\lambda}t\right) + b \sin\left(\sqrt{-\lambda}t\right).$$

En tenant compte des conditions initiales et des conditions aux limites, on détermine le cas qui se produit et les solutions de l'équation.

Équation des ondes : séries de Fourier

On cherche les **solutions L -périodiques** de l'équations des ondes :

$$(EO3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(x, t) = u(x + L, t), \end{array} \right.$$

où on suppose que les fonctions u_0 et u_1 sont L -périodiques et admettent un développement en séries de Fourier ($\omega = \frac{2\pi}{L}$)

$$u_0(x) = \frac{a_{0,0}}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_{0,n} \cos(n\omega x) + b_{0,n} \sin(n\omega x))$$

$$u_1(x) = \frac{a_{1,0}}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_{1,n} \cos(n\omega x) + b_{1,n} \sin(n\omega x))$$

Équation des ondes : séries de Fourier

Supposons que la solution $u(x, t)$ soit développable en séries de Fourier

$$u(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(t) \cos(n\omega x) + b_n(t) \sin(n\omega x)).$$

En dérivant *formellement* terme à terme (utiliser le théorème de dérivation terme à terme des séries du Cours 2 pour un argument rigoureux au cas par cas), on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n''(t) \cos(n\omega x) + b_n''(t) \sin(n\omega x)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n \geq 1} -(n\omega)^2 (a_n(t) \cos(n\omega x) + b_n(t) \sin(n\omega x)).$$

Équation des ondes : séries de Fourier

Par identification, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} \left((a_n''(t) + (cn\omega)^2 a_n(t)) \cos(n\omega x) \right. \\ &\quad \left. + (b_n''(t) + (cn\omega)^2 b_n(t)) \sin(n\omega x) \right) = 0\end{aligned}$$

et en tenant compte des conditions initiales et utilisant l'unicité de la décomposition en série de Fourier de $x \mapsto u(x, t)$ pour tout t , on obtient

$$a_0''(t) = 0, \quad a_0(0) = a_{0,0}, \quad a_0'(0) = a_{1,0}$$

$$a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n(t) = 0, \quad a_n(0) = a_{0,n}, \quad a_n'(0) = a_{1,n},$$

$$b_n''(t) + \lambda_n^2 b_n(t) = 0, \quad b_n(0) = b_{0,n}, \quad b_n'(0) = b_{1,n},$$

où $\lambda_n = cn\omega$.

En résolvant les équations différentielles ordinaires précédentes, on obtient

$$a_0(t) = a_{1,0}t + a_{0,0},$$

$$a_n(t) = a_{0,n} \cos(\lambda_n t) + \frac{a_{1,n}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t),$$

$$b_n(t) = b_{0,n} \cos(\lambda_n t) + \frac{b_{1,n}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t),$$

et donc la solution $u(x, t)$.

Exercice

Calculer les solutions 2-périodiques de l'équation des ondes, avec

$$u_0(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2[, \end{cases}$$

et $u_1(x) = 0$.

Équation de Laplace, Équation de Poisson

On considère l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0,$$

et l'équation de Poisson

$$\Delta u = \rho.$$

Équation de Laplace : solutions à variables séparées

On cherche des solutions de l'équation de Laplace

$$\Delta u(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

à variables séparées. On suppose donc qu'il existe deux fonctions $F(x)$ et $G(y)$ telles que

$$u(x, y) = F(x)G(y).$$

En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0$$

et il existe donc une constante λ telle que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda = -\frac{G''(y)}{G(y)}.$$

Équation de Laplace : solutions à variables séparées

Comme dans le cas des équations des ondes, on distingue alors les trois cas suivants :

- si $\lambda = 0$, alors

$$F(x) = ax + b, \quad G(y) = \alpha y + \beta.$$

- si $\lambda > 0$, alors

$$F(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad G(y) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}y) + \beta \sin(-\sqrt{\lambda}y).$$

- si $\lambda < 0$, alors

$$F(x) = a \cos(\sqrt{-\lambda}x) + b \sin(\sqrt{-\lambda}x),$$

$$G(y) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}y} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}y}.$$

En tenant compte des conditions initiales, on détermine le cas qui se produit et les solutions de l'équation.

Équation de la chaleur

On s'intéresse à l'équation de la chaleur avec condition initiale sur tout \mathbb{R}

$$(EC1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et l'équation de la chaleur sur $[0, +\infty[$ avec condition au bord en $x = 0$

$$(EC2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x > 0, \quad \forall t > 0, \\ u(0, t) = u_0(t), & \forall t > 0, \end{cases}$$

Remarque

L'équation étant d'ordre 1 en temps, il est naturel de n'imposer qu'une seule condition initiale u_0 en $t = 0$ dans (EC1).

Grâce aux séries de Fourier, on peut démontrer le résultat suivant :

Théorème 3

Soient $c > 0$ et $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 par morceaux, continue et 2π -périodique. Alors il existe une unique solution u de (EC1) vérifiant

- pour tout $t > 0$, $u(x, t)$ est 2π -périodique comme fonction en x ,
- la dérivée partielle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial t}$) existe et est continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$,
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t) - u_0(x)| = 0$.

Cette dernière propriété dit exactement que, posant $u_t : x \mapsto u(x, t)$, on a $u_t \rightarrow u_0$ uniformément sur \mathbb{R} quand $t \rightarrow 0^+$.

Théorème 4

Soient $c > 0$ et $u_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 par morceaux, continue et 2π -périodique. Alors il existe une unique solution u de (EC2) vérifiant

- pour tout $x > 0$, $u(x, t)$ est 2π -périodique comme fonction en t ,
- la dérivée partielle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial t}$) existe et est continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sup_{t > 0} |u(x, t) - u_0(x)| = 0$.

MERCI DE VOTRE ATTENTION !