Cours 9. Convolution. Transformée de Fourier et Applications.

Mathématiques 4

5 février 2024

Convolution et Transformée de Fourier : motivation (I)

Nous avons vu la notion de série de Fourier. Par exemple pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique, on a obtenu une décomposition en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} ,$$

où les coefficients de Fourier (complexes) $c_n(f)$ sont obtenus par les intégrales

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx.$$

Convolution et Transformée de Fourier : motivation (II)

Si l'on veut travailler sans périodicité, on a besoin de fonctions de base de périodes différentes : les ondes planes, pas seulement e^{inx} de fréquence n, mais aussi e^{ipx} pour p réel (onde plane d'impulsion ou fréquence p). Dans ce cas, on va analyser la fonction en fréquence (variable p), mais au lieu d'obtenir une suite, on va obtenir une fonction de p : la transformée de Fourier. C'est finalement une fonction définie par une intégrale à paramètre p, la fréquence. La reconstruction de la fonction de départ sera donnée par la formule d'inversion de Fourier, qui fera intervenir une intégrale au lieu d'une somme.

Pour comprendre la transformée de Fourier d'un produit, il est aussi naturel d'introduire dans ce chapitre une notion de produit de convolution. On note $L^1(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions intégrables, c'est à dire $f \in L^1(\mathbb{R})$ si f est mesurable et si

$$||f||_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty.$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ via

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x) dx.$$

On la note aussi parfois $\mathcal{F}(f)$ au lieu de $\hat{f}$. On veut définir également l'intégrale suivante à paramètre x :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy\,,$$

pourvu que l'intégrale existe. C'est bien le cas si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, d'après le théorème suivant, qui rassemble les deux situations les plus simples.

Théorème

[Définition de la convolution]

1. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. La *convolution* de f et g est la fonction donnée par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy\,.$$

En particulier, le théorème de Fubini (plus fort que celui du cours) assure alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.

2. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et g (mesurable) bornée par $C > 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. La *convolution* $f * g$ de f et g est la fonction donnée par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy\,.$$

On a alors $f * g$ est bornée avec $|f * g(x)| \leqslant C||f||_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème

[Propriétés de base de la convolution] Si f, g, h sont dans $L^1(\mathbb{R})$, on a :

1. (Commutativité) $(f * g) = (g * f)$.
2. (Associativité) $(f * g) * h = f * (g * h)$.
3. (Linéarité)
   $f * (g + h) = f * g + f * h, f * (cg) = c(f * g)$ pour tout $c \in \mathbb{C}$.
4. Si f est $\mathcal{C}^1$ (avec f, f' bornées, par exemple c'est le cas si f est nulle en dehors d'un borné). alors $f * g$ est $\mathcal{C}^1$ et $(f * g)' = f' * g$.
5. $\widehat{f * g}(p) = \hat{f}(p)\hat{g}(p)$.
6. Sous hypothéses supplémentaires, $\widehat{fg}(p) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(p)$.

Les points 4 et 5 sont les calculs clefs motivant la définition de la convolution.

Exemple

Calculer $f * f$ pour $f(x) = 1_{[0,1]}(x)$.
Indication : Noter $A(x) = f(y)f(x-y)$ et étudier ses valeurs suivant x, y.
Ensuite, distinguer les cas $x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $1 \leqslant x \leqslant 2$ et $x > 2$.

Exemple

Si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ (fonction gaussienne) alors sa transformée de Fourier est (voir exo Cours 7) :

$$\hat{f}(p) = e^{-p^2/4}.$$

C'est un fait remarquable qu'on obtienne encore une exponentielle similaire. On verra plus loin par changement de variable que si $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ alors $\hat{g}(p) = e^{-p^2/2}$ de sorte que la fonction gaussienne est un vecteur propre de la transformée de Fourier.

Exemple de calcul

Regardons une fonction nulle en dehors d'un intervalle borné $[-M, M] \subset \mathbb{R}$ pour voir que dans ce cas, la transformée de Fourier est très régulière même si f n'est pas continue, mais bien localisée. Posons

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } x < -1\,, \\ 1/2\,, & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1\,, \\ 0\,, & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

On a alors pour $p \neq 0$:

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ixp}dx = \frac{e^{ip} - e^{-ip}}{2ip} = \frac{\sin(p)}{p} =: \mathrm{sinc}(p)$$

0on obtient séparément $\hat{f}(p) = 1$ pour $p = 0$. Cette fonction est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une série entière de rayon de convergence infini :

$$\mathrm{sinc}(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} p^{2k}\,.$$

Formules calculatoires

Théorème

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a les propriétés suivantes.

1. (Linéarité) La transformée de Fourier $\hat{\cdot}$ est linéaire : $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$, $\widehat{cf} = c\hat{f}$ pour $c \in \mathbb{C}$.
2. (Conjugaison) On a $\hat{\overline{f}}(p) = \overline{\hat{f}(-p)}$.
3. (Dérivée) Si f est $\mathcal{C}^1$ et que $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\widehat{(f')}(p) = ip\hat{f}(p)$.
4. (Produit par x) Si $f, xf \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ dérivable et $\widehat{xf}(p) = i(\hat{f})'(p)$.
5. (Translation) Si $g(x) = f(x+a)$ alors $\hat{g}(p) = e^{ipa}\hat{f}(p)$.
6. (Changement d'échelle) Si $g(x) = f(sx)$ pour $s \neq 0$, alors $\hat{g}(p) = \frac{1}{s}\hat{f}(\frac{p}{s})$.
7. (Produit) $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}$

Exemple

(Retour sur les transformées de Fourier des gaussiennes) Si $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ alors on a $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma} g_1(\frac{x}{\sigma})$ donc $\widehat{g_\sigma}(p) = \widehat{g}_1(\sigma p)$. Comme on a calculé à l'exemple 8 que $\widehat{g_{1/\sqrt{2}}}(p) = \widehat{g}_1(p/\sqrt{2}) = e^{-p^2/4}$, on en déduit $\widehat{g}_1(p) = e^{-p^2/2}$ puis

$$\widehat{g_\sigma}(p) = \widehat{g_{1/\sqrt{2}}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}} p\right) = e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2}}.$$

Théorème

(Lemme de Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ est continue et

$$\lim_{p \to \pm\infty} \hat{f}(p) = 0.$$

Si on sait que $\hat{f}$ converge vers 0 et aussi une propriété d'intégrabilité :

Théorème

[Théorème d'injectivité et inversion de la TF] Deux fonctions continues intégrables f, g telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \hat{f}(t) = \hat{g}(t),$$

satisfont $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (si f, g sont seulement intégrables alors $f = g$ pour "presque tout $x \in \mathbb{R}$"). En plus, si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a la formule

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} dt = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\hat{f}](-x)$$

en tout point x de continuité de f.

On va maintenant expliquer l'analogue du théorème de Plancherel pour les séries de Fourier qui dit que si f est 2π-périodique, avec $|f|^2$ intégrable sur une période, alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2.$$

On note l'ensemble des fonctions de carré sommable

$$L^2(I) := \{f : I \to \mathbb{C} \text{ mesurable } : |f|^2 \text{ intégrable}\}.$$

On rappelle que

$$L^1(I) = \{f : I \to \mathbb{C} \text{ mesurable } : |f| \text{ intégrable}\}.$$

On a le théorème suivant :

Théorème

[Théorème de Plancherel] Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors on peut donner un sens à $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et on a l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(p)|^2 dp.$$

Nous n'avions défini $\hat{f}$ que pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ jusqu'au théorème précédent. Pour obtenir ce théorème, on montre d'abord l'identité pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et on en déduit que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'on choisit une suite de fonctions (f_n) dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |f_n - f|^2 dx \to 0$, alors il existe une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ (indépendante de l'approximation (f_n)) telle que $\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_n - g|^2 dp \to 0$. Il est alors cohérent de définir $\hat{f} := g$.

Exemple

Pour $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, on a vu que $\hat{f}(p) = e^{-p^2/2}$ de sorte que dans ce cas le théorème donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} dp.$$

On peut se souvenir du coefficient $1/2\pi$ à partir de cet exemple. Les constantes de normalisation sont imposées par $\hat{f}(0) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$.

Dernier exercice : Calculer $\hat{f}(p)$ pour $f(x) = e^{-|x|}$.