Cours 8. Transformée de Laplace.

Mathématiques 4

5 février 2024

Transformée de Laplace

Definition

Pour une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ (ou bien une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = 0$ si $x < 0$) mesurable, on pose

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

pour $s \in \mathbb{R}$ (pourvu que l'intégrale existe). En particulier, si en $+\infty$, $f(t) = O(e^{at})$, alors $\mathcal{L}[f](s)$ existe pour $s > a$.

Formules calculatoires

Théorème

[Propriétés de bases de la transformée de Laplace] Les formules suivantes sont vraies dès que tous les termes ont un sens :

1. (Linéarité) $\mathcal{L}[f+g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$ et $\mathcal{L}[cf] = c\mathcal{L}[f]$ pour $c \in \mathbb{C}$.
2. (Retard fréquentiel) Si $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}[e^{at}f](s) = \mathcal{L}[f](s-a)$.
3. (Produit par t) Si à l'infini, $f(t) = O(e^{at})$, alors pour $s > a$: $\mathcal{L}[tf(t)](s) = -(\mathcal{L}[f])'(s)$.
4. (Dérivée) Si à l'infini, $f(t) = O(e^{at})$ et $f'(t) = O(e^{at})$, alors pour $s > a$, $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$.
5. (Convolution) Si f, g positives, en posant $(f*g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$, on a : $\mathcal{L}[f*g](s) = \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s)$

Dans le dernier point, on considère $f, g \equiv 0$ pour $x < 0$ donc :

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds = \int_0^t f(s)g(t-s)ds = \int_0^t f(t-s)g(s)ds.$$

Exemples de référence

Exemple

On a

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

En effet, pour $n = 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$. Puis par le théorème précédent, point 3, et par récurrence :

$$\mathcal{L}[t^n](s) = -\mathcal{L}[t^{n-1}]'(s) = -\left(\frac{(n-1)!}{s^n}\right)' = +\frac{n!}{s^{n+1}}$$

Exemple

En général, la plupart des exemples sont des sommes de séries entières de type $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ et la transformée de Laplace (pourvu qu'elle fasse sens) est $\mathcal{L}[f](s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{s^{n+1}}$ au moins pour s grand.

Exercices (I)

$$\mathcal{L}[e^{at}t^n](s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}. \qquad (1)$$

$$\mathcal{L}[e^{at}\cos(\omega t)](s) = \frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}. \qquad (2)$$

Avec le retard fréquentiel, il suffit de traiter le cas $a = 0$. On écrit $\cos(\omega t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(\omega t)^{2k}}{(2k)!}$ donc la formule des séries s'applique avec $a_{2n} = \omega^{2n}(-1)^n$, $a_{2n+1} = 0$ d'où

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\omega^{2k}}{s^{2k}} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{+\infty}[-\omega^2 s^{-2}]^{n+1} = \frac{1}{s(1+\omega^2 s^{-2})} = \frac{s}{\omega^2+s^2}$$

par identification d'une série géométrique si $|\omega^2 s^{-2}| < 1$, soit en particulier pour $s > |\omega|$.

Exercices (II)

$$\mathcal{L}[e^{at}\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}. \tag{3}$$

Pour varier les méthodes, obtenons maintenant ce résultat par calcul direct :

$$\mathcal{L}[e^{at}\sin(\omega t)](s) = \frac{1}{2i}(\mathcal{L}[e^{(a+i\omega)t}](s) - \mathcal{L}[e^{(a-i\omega)t}](s))$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{(s-a+i\omega)-(s-a-i\omega)}{(s-a-i\omega)(s-a+i\omega)}\right) = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}.$$

Inverser la transformation de Laplace

La formule d'inversion de la transformation de Laplace est en général trop compliquée pour ce cours. En pratique, cette inversion se fait a l'aide des tables d'exemples : on connaît les transformées de Laplace de certaines fonctions et on essaie de se ramener à ces cas à l'aide des propriétés algébriques.

Exercice

Soit $Y(s) = \frac{b}{(s-a)^n}$, trouver f telle que $\mathcal{L}[f] = Y$.

On identifie dans l'exemple 1 $f(t) = \frac{bt^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$ (pour $t \geqslant 0$).

Application à la résolution d'EDO (I)

On traite 2 exemples. On peut se reporter à `http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/~kellendonk/Arbeiten/Math4-2018-cours-resume.pdf` pour une solution générale.

Exemple

$$af'(t) + bf(t) = g(t),\ \ t > 0, f(0) = c.$$

Soit $Y(s) = \mathcal{L}[f](s)$. On a vu que $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$. Donc utilisant l'équation, on veut que

$$\mathcal{L}[g](s) = a\mathcal{L}[f'](s) + b\mathcal{L}[f](s) = (as+b)\mathcal{L}[f](s) - af(0).$$

Donc on trouve

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{\mathcal{L}[g](s) + af(0)}{as+b}.$$

L'inversion de la transformée de Laplace donne f.

Encore un exemple

Exemple

$$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = g(t), \quad t > 0, \quad f(0) = d, \quad f'(0) = e.$$

Soit $Y(s) = \mathcal{L}[f](s)$. Comme $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$, en itérant :

$$\mathcal{L}[f''](s) = s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f](s) - f'(0) - sf(0)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g](s) &= a\mathcal{L}[f''](s) + b\mathcal{L}[f'](s) + c\mathcal{L}[f](s) \\ &= (as^2 + bs + c)\mathcal{L}[f](s) - af'(0) - asf(0) - bf(0). \end{aligned}$$

Donc on trouve avec les conditions initiales de l'énoncé que

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{\mathcal{L}[g](s) + (as + b)f(0) + af'(0)}{as^2 + bs + c}.$$

L'inversion de la transformée de Laplace donne f.

Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

Il n'est pas facile en général de lire des propriétés qualitatives de f à partir de celles de sa transformée de Laplace ou inversement. On a cependant le résultat suivant.

Théorème

Soit f bornée à l'infini et si les limites existent :

$$\lim_{s\to+\infty} s\mathcal{L}[f](s) = \lim_{t\to 0^+} f(t), \qquad \text{(valeur initiale)}$$

$$\lim_{s\to 0^+} s\mathcal{L}[f](s) = \lim_{t\to+\infty} f(t) \qquad \text{(valeur finale)}$$

Ce résultat est facile à prouver en intégrant par parties sous des hypothèses supplémentaires. Sinon on coupe l'intégrale en $\sqrt{s}$ et on fait des calculs plus subtils.