Cours 8. Transformée de Fourier et Applications.

Mathématiques 4

5 février 2024

Exemple

Si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ (fonction gaussienne) alors sa transformée de Fourier est (voir exo Cours 7) :

$$\hat{f}(p) = e^{-p^2/4}.$$

C'est un fait remarquable qu'on obtienne encore une exponentielle similaire. On verra plus loin par changement de variable que si $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ alors $\hat{g}(p) = e^{-p^2/2}$ de sorte que la fonction gaussienne est un vecteur propre de la transformée de Fourier.

Retour sur le Dirac

Comme par définition $\delta_a(f) = f(a)$, on a (par passage à la limite) $\hat{\delta}_a(p) = e^{-ipa}$. En particulier $\hat{\delta}_0 = 1$ est une fonction constante. Ceci peut être vu comme une première manifestation qualitative du principe d'incertitude : la transformée de Fourier d'un signal très localisé en espace doit être très délocalisée en fréquence (quoi de plus localisé qu'une mesure de Dirac, ou de plus délocalisé qu'une fonction constante...).

Remarque

Calculons également

$$(f * \delta_a)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) d\delta_a(y) = f(x-a).$$

En particulier $\boxed{f * \delta_0 = f}$.

Exemple de calcul

Regardons une fonction nulle en dehors d'un intervalle borné $[-M, M] \subset \mathbb{R}$ pour voir que dans ce cas, la transformée de Fourier est très régulière même si ρ n'est pas continue, mais bien localisée. Posons

$$\rho(t) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } t < -1\,, \\ 1/2\,, & \text{si } -1 \leqslant t \leqslant 1\,, \\ 0\,, & \text{si } t > 1\,. \end{cases}$$

On a alors

$$\hat{\rho}(p) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ipx}dx = \frac{e^{ip} - e^{-ip}}{2ip} = \frac{\sin(p)}{p} =: \mathrm{sinc}(p)$$

si $p \neq 0$; on obtient séparément $\hat{\rho}(0) = 1$ pour $p = 0$. Cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une série entière de rayon de convergence infini :

$$\mathrm{sinc}(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} p^{2k}\,.$$

Formules calculatoires

Théorème

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a les propriétés suivantes.

1. (Linéarité) La transformée de Fourier $\hat{\cdot}$ est linéaire : $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$, $\widehat{cf} = c\hat{f}$ pour $c \in \mathbb{C}$.
2. (Conjugaison) On a $\hat{\overline{f}}(p) = \overline{\hat{f}(-p)}$.
3. (Dérivée) Si f est $\mathcal{C}^1$ et que $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\widehat{(f')}(p) = ip\hat{f}(p)$.
4. (Produit par x) Si $f, xf \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ dérivable et $\widehat{xf}(p) = i(\hat{f})'(p)$.
5. (Translation) Si $g(x) = f(x+a)$ alors $\hat{g}(p) = e^{ipa}\hat{f}(p)$.
6. (Changement d'échelle) Si $g(x) = f(sx)$ pour $s \neq 0$, alors $\hat{g}(p) = \frac{1}{s}\hat{f}(\frac{p}{s})$. En particulier, on a $\widehat{\rho_\varepsilon}(p) = \widehat{\rho}(\varepsilon p)$.
7. (Produit) $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}$

Exemple

(Retour sur les transformées de Fourier des gaussiennes) Si $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ alors on a $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma} g_1(\frac{x}{\sigma})$ donc $\widehat{g_\sigma}(p) = \widehat{g}_1(\sigma p)$. Comme on a calculé à l'exemple 2 que $\widehat{g_{1/\sqrt{2}}}(p) = \widehat{g}_1(p/\sqrt{2}) = e^{-p^2/4}$, on en déduit $\widehat{g}_1(p) = e^{-p^2/2}$ puis

$$\widehat{g_\sigma}(p) = \widehat{g_{1/\sqrt{2}}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}} p\right) = e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2}}.$$

Théorème

(Lemme de Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ est continue et

$$\lim_{p \to \pm\infty} \hat{f}(p) = 0.$$

Remarque : ce théorème est une autre façon de voir que la mesure de Dirac δ_0 ne peut être écrite comme T_g pour un $g \in L^1(\mathbb{R})$. On a en effet $\widehat{\delta_0}(p) = 1$ pour tout p de sorte que $\lim_{p \to \pm\infty} \widehat{\delta_0}(p) = 1 \neq 0$.

Si on sait que $\hat{f}$ converge vers 0 et aussi une propriété d'intégrabilité :

Théorème

[Théorème d'injectivité et inversion de la TF] Deux fonctions continues intégrables f, g telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \hat{f}(t) = \hat{g}(t),$$

satisfont $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (si f, g sont seulement intégrables alors $f = g$ pour "presque tout $x \in \mathbb{R}$"). En plus, si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a la formule

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} dt = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\hat{f}](-x)$$

en tout point x de continuité de f.

Exercice

Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$. En déduire la transformée de Fourier de $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

On va maintenant expliquer l'analogue du théorème de Plancherel pour les séries de Fourier qui dit que si f est 2π-périodique, avec $|f|^2$ intégrable sur une période, alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2.$$

On note l'ensemble des fonctions de carré sommable

$$L^2(I) := \{f : I \to \mathbb{C} \text{ mesurable } : |f|^2 \text{ intégrable}\}.$$

On rappelle que

$$L^1(I) = \{f : I \to \mathbb{C} \text{ mesurable } : |f| \text{ intégrable}\}.$$

On a le théorème suivant :

Théorème

[Théorème de Plancherel] Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors on peut donner un sens à $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et on a l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(p)|^2 dp.$$

Nous n'avions défini $\hat{f}$ que pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ jusqu'au théorème précédent. Pour obtenir ce théorème, on montre d'abord l'identité pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et on en déduit que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'on choisit une suite de fonctions (f_n) dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |f_n - f|^2 dx \to 0$, alors il existe une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ (indépendante de l'approximation (f_n)) telle que $\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_n - g|^2 dp \to 0$. Il est alors cohérent de définir $\hat{f} := g$.

Exemple

Pour $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, on a vu que $\hat{f}(p) = e^{-p^2/2}$ de sorte que dans ce cas le théorème donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} dp.$$

On peut se souvenir du coefficient $1/2\pi$ à partir de cet exemple. Les constantes de normalisation sont imposées par
$\hat{f}(0) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$.

Equation de la chaleur

Étant donnée une condition initiale $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on veut maintenant résoudre l'*équation de la chaleur* homogène sur tout $\mathbb{R}$, d'inconnue $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, & \text{pour } t > 0, \quad x \in \mathbb{R}\,, \\ u(0,x) = v(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{EC}$$

La modélisation associée a déjà été brièvement discutée dans le cadre périodique.

Equation de la chaleur

On raisonne d'abord formellement et on pose $u_t(x) = u(t,x)$. Supposons qu'une solution admette une transformée de Fourier en la variable d'espace x pour tout temps $t \geqslant 0$ (par exemple u_t est intégrable, i.e. est dans $L^1(\mathbb{R})$). Alors, pour p fixé, $\widehat{u_t}(p)$ va vérifier une équation différentielle de variable t. En effet, on écrit pour $t \in]0, +\infty[$

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u_t}(p) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-ipx}dx \underset{2}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{-ipx}dx$$

$$= \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(t,p) \underset{4}{=} \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(t,p) \underset{5}{=} (ip)^2\widehat{u_t}(p) = -p^2\widehat{u_t}(p). \qquad \text{(ED)}$$

L'égalité 2 est la dérivation de l'intégrale à paramètre t (p fixé), l'égalité 4 suit de (EC) et l'égalité 5 de la double application de la formule pour la transformée de Fourier d'une dérivée en la variable spatiale x.

Donc ajoutant la condition initiale $\widehat{u_0}(p) = \widehat{v}(p)$ à l'équation différentielle (ED) de variable t (toujours pour p fixé), on obtient $\widehat{u_t}(p) = e^{-p^2 t}\widehat{v}(p)$.

Indépendamment, on a vu que si $g_{\sqrt{2t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$, alors $\widehat{g_{\sqrt{2t}}}(p) = e^{-p^2 t}$ donc $\widehat{u_t}(p) = \widehat{g_{\sqrt{2t}}}(p)\widehat{v}(p)$.
Maintenant, par la formule liant transformée de Fourier et convolution, on voit que la fonction

$$u_t(x) = (g_{\sqrt{2t}} * v)(x) \tag{CV}$$

a la bonne transformée de Fourier. Par le calcul précédent :

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(p) = \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(p).$$

Donc par le théorème d'inversion, u satisfait donc l'équation.

Équation de la chaleur : existence et unicité d'une solution

Appliquant les théorèmes des chapitres précédents pour avoir un argument rigoureux, on a :

Théorème

Soit v une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une unique solution u de *(EC)* vérifiant

1. pour tout $t \in]0, +\infty[$, u est continue et intégrable en x (i.e. $x \mapsto u(t, x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$),
2. les dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont bien définies, continues sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$, et intégrables en x pour tout $t \in]0, +\infty[$,
3. pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u(0, x) = v(x)$ et même

$$\|u_t - v\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - v(x)|\, dx \to 0 \text{ quand } t \to 0\,.$$

De plus, u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ et continue sur $[0, +\infty[\times\mathbb{R}$.

Equation de la chaleur : comportement en temps long

Théorème

[Équation de la chaleur (EC) : résultats de comportement en temps long] Soit v une fonction continue. Dans les deux cas suivants, on se donne u la solution de (EC) donnée par la convolution (CV) et on pose $u_t : x \mapsto u(t,x)$.

1. On suppose que $v \in L^1(\mathbb{R})$ est intégrable. Alors $u_t\sqrt{4\pi t} \to \int_{\mathbb{R}} v(z)dz$ simplement sur $\mathbb{R}$ quand $t \to +\infty$. En particulier, $u_t \to 0$ quand $t \to +\infty$.
2. On suppose que v tend vers des limites finies en $\pm\infty$: il existe $l_+, l_- \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x\to+\infty} v(x) = l_+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} v(x) = l_- \, .$$

Alors $u_t \to \frac{l_+ + l_-}{2}$ simplement sur $\mathbb{R}$ quand $t \to +\infty$.

L'équation des ondes (I)

Nous avons déjà proposé une solution de l'équation des ondes homogène avec condition initiale dans le Cours 4 : la formule de d'Alembert. Une méthode pour obtenir cette formule utilise la transformée de Fourier. C'est l'objet de l'exercice suivant :

Exercice

Utiliser la transformation de Fourier pour résoudre l'équation des ondes (ou de la corde vibrante) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, & \text{pour } t > 0, x \in \mathbb{R}\,, \\ u(0,x) = v(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, & \text{pour } x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

L'équation des ondes (II)

Reprenons les arguments formels du début du chapitre. Soit $p \in \mathbb{R}$ une fréquence fixée. On a pour $t \in]0, +\infty[$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widehat{u}_t(p) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-ipx}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)e^{-ipx}dx$$

$$= \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}(t,p) = \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(t,p) = -p^2\widehat{u}_t(p)\,.$$

Les solutions de cette équation différentielle (p est toujours fixé) sont donc données par

$$\forall t \geqslant 0\,, \quad \widehat{u}_t(p) = A(p)\cos(pt) + B(p)\sin(pt)\,.$$

L'équation des ondes (III)

En y adjoignant les conditions initiales

$$\widehat{u_0}(p) = \hat{v}(p) \text{ et } \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(0,p) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) e^{-ipx} dx = 0\,,$$

on obtient $B(p) \equiv 0$ et $A(p) = \hat{v}(p)$. D'où

$$\widehat{u_t}(p) = \hat{v}(p)\frac{e^{ipt} + e^{-ipt}}{2} \implies u_t(x) = \frac{1}{2}\left(u(x+t) + u(x-t)\right)\,,$$

On retrouve la formule de d'Alembert dans ce cas particulier.

L'équation de Schrödinger (I)

Étant donnée une condition initiale $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on veut maintenant résoudre l'*équation de Schrödinger* homogène sur tout $\mathbb{R}$, d'inconnue $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, & \text{pour } t > 0, \quad x \in \mathbb{R}\,, \\ u(0,x) = v(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{ES}$$

On raisonne formellement comme au début de ce cours, posant $u_t(x) = u(t,x)$. Supposons qu'une solution admette une transformée de Fourier en la variable d'espace x pour tout temps $t \geqslant 0$ (par exemple u_t est intégrable, i.e. est dans $L^1(\mathbb{R})$).

L'équation de Schrödinger (II)

Alors, pour p fixé, $\widehat{u}_t(p)$ va vérifier une équation différentielle de variable t. En effet, on écrit pour $t \in]0, +\infty[$

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}_t(p) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-ipx}dx \underset{2}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{-ipx}dx \tag{ED2}$$

$$= \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(t,p) \underset{4}{=} -i\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(t,p) \underset{5}{=} ip^2\widehat{u}_t(p). \tag{1}$$

L'égalité 2 est la dérivation de l'intégrale à paramètre t (p fixé), l'égalité 4 suit de $i\times$(ES) et l'égalité 5 de la double application de la formule pour la transformée de Fourier d'une dérivée en la variable spatiale x.

L'équation de Schrödinger (III)

Donc ajoutant la condition initiale $\widehat{u_0}(p) = \widehat{v}(p)$ à l'équation différentielle (ED2) de variable t (toujours pour p fixé), on obtient $\widehat{u_t}(p) = e^{ip^2t}\widehat{v}(p)$. En particulier, comme p^2t est réel, $|\widehat{u_t}(p)| = |\widehat{v}(p)|$. Ainsi, utilisant aussi le théorème de Plancherel l'énergie $\int_{\mathbb{R}} |u_t(x)|^2 dx$ est indépendante du temps car

$$\int_{\mathbb{R}} |u_t(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u_t}(p)|^2 \, dp = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{v}(p)|^2 \, dp = \int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 dx \, .$$

L'équation de Schrödinger (IV)

Comme pour l'équation de la chaleur, cette formule multiplicative en Fourier suggère que la solution soit donnée pour $t > 0$ par une convolution. Il s'avère que c'est bien le cas

$$u(t,x) = \frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} v(x-y) e^{-i\frac{y^2}{4t}} dy\,.$$

Remarquons tout d'abord qu'on peut formellement écrire le noyau $\frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{4\pi t}} e^{-i\frac{y^2}{4t}}$ avec lequel on convole la condition initiale v comme $g_{\sqrt{-2it}}(y)$. Concernant le sens de cette intégrale, remarquez également qu'il s'agit d'une intégrale oscillante, dont a on a essentiellement vérifié la convergence pour $v \equiv 1$ et $t = \frac{1}{4}$.

Le principe d'incertitude (I)

En physique, ce principe donne une limitation théorique à la précision à laquelle on peut connaître à la fois la position et la quantité de mouvement d'une particule.

Étant donnée une particule dont la position suit une densité de probabilité f, alors la position moyenne de la particule est donnée par l'espérance $x_0 := \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx \in \mathbb{R}$. Une façon de mesurer alors l'écart moyen de cette particule par rapport à cette position moyenne est donné par la variance ou incertitude donnée par $\sigma^2 := \int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 f(x)dx$. Essentiellement, $\sigma = 0$ dans la cas déterministe d'une particule en x_0 avec probabilité 1, i.e. $f = \delta_{x_0}$.

Le principe d'incertitude (II)

En physique quantique, si cette distribution de position est donnée en général par $f(x) = |\psi(x)|^2$, alors la distribution du moment est donnée par $|\hat{\psi}(p)|^2/(2\pi)$ de sorte que la variance ou incertitude du moment est donnée par $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(p-p_0)^2|\hat{\psi}(p)|^2dp$ où $p_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} p|\hat{\psi}(p)|^2dp$. Dans la suite, on prendra pour simplifier $x_0 = p_0 = 0$. Attention que les constantes explicites apparaissant dans cette section dépendent de la normalisation (souvent différente en physique) choisie pour définir la transformée de Fourier. D'autre part, dans ces applications en physique quantique, la constante de Planck $\hbar$ joue un rôle dimensionnel, mais elle n'apparaît pas en général dans les énoncés mathématiques où l'on préfère travailler en variables adimensionnées.

Localisation

Nous avons déjà évoqué le principe (vague pour l'instant) suivant : plus une fonction est localisée, plus sa transformée de Fourier est "étalée". Par exemple, nous avons vu que la transformée de Fourier d'une indicatrice $\frac{1}{2}1_{[-1,1]}$ est la fonction sinc qui ne décroît pas très vite vers 0 au sens où elle n'est pas intégrable en $\pm\infty$. Une autre manifestation plus quantitative de ce principe est le point concernant le changement d'échelle : pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ donnée, si

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \qquad f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

pour $\varepsilon > 0$, alors $\widehat{f_\varepsilon}(p) = \hat{f}\,(\varepsilon p)$. Dans le cas où $\int_{\mathbb{R}} f = 1$, nous avons vu que $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon = 1$ également et que les f_ε *se concentrent* en 0 au sens où $f_\varepsilon \rightharpoonup \delta_0$ au sens des mesures quand $\varepsilon \to 0^+$. Le changement d'échelle donne alors que les $\widehat{f_\varepsilon}$ *s'étalent* au sens où $\widehat{f_\varepsilon} \to \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f = 1$ simplement sur $\mathbb{R}$. À la limite, on retrouve la propriété que la transformée de Fourier d'une mesure δ_0 de Dirac supportée en un seul point est la fonction constante égale à 1 partout.

Formalisation du principe

Notation : on note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide, c'est à dire telles que toutes les fonctions $x \mapsto |\psi^{(k)}(x)|(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ pour tout $m, k \in \mathbb{N}$. Ces propriétés de décroissance/régularité et les formules calculatoires vues sur la transformée de Fourier assurent que

$$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) .$$

On peut alors formaliser l'intuition ci-dessus dans le théorème suivant (en regardant les variances dans le cas de la position et du moment nuls en moyenne).

Théorème

[Principe d'incertitude d'Heisenberg] Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx\right)^2 \leqslant \frac{2}{\pi}\left(\int_{\mathbb{R}} x^2|\psi(x)|^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} p^2|\hat{\psi}(p)|^2 dp\right) .$$

De plus, on a égalité si et seulement si $\psi(x) = ae^{-bx^2}$ pour des constantes $a \in \mathbb{C}$ et $b > 0$ données.

Démonstration (I)

On peut tout d'abord observer que, pour $b \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-bx^2}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si $b > 0$.

On commence par intégrer par parties en écrivant

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\overline{\psi(x)} dx &= \left[x|\psi(x)|^2\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} x \left(\psi'(x)\overline{\psi}(x) + \psi(x)\overline{\psi'} \right. \\ &= 0 + 2\int_{\mathbb{R}} -\mathrm{Re}\left(x\psi(x)\overline{\psi'}(x)\right) dx\,, \qquad (2) \end{aligned}$$

en observant que

$$\left(\psi(x)\overline{\psi(x)}\right)' = \left(\psi'(x)\overline{\psi}(x) + \psi(x)\overline{\psi'}(x)\right) = 2\mathrm{Re}\left(\psi(x)\overline{\psi'}(x)\right)\,,$$

que $x|\psi(x)|^2 \to 0$ quand $x \to \pm\infty$, car $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ implique que $x \mapsto x^2|\psi'(x)|^2$ est bornée sur $\mathbb{R}$, et remarquant enfin que x est réel.

Démonstration (II)

Indépendamment, on peut écrire

$$\left|\int_{\mathbb{R}} -\mathrm{Re}\left(x\psi(x)\overline{\psi'}(x)\right)dx\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|-\mathrm{Re}\left(x\psi(x)\overline{\psi'}(x)\right)\right| dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|x\psi(x)\overline{\psi'}(x)\right| dx \tag{3}$$

utilisant d'abord $|\int f| \leqslant \int |f|$, puis que $|-\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Maintenant, utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left|x\psi(x)\psi'(x)\right| dx\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} \left|x\psi(x)\right|^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx\right). \tag{4}$$

Enfin, on utilise le Théorème de Plancherel, puis la formule sur la transformée de Fourier d'une dérivée $\widehat{\psi'}(p) = ip\widehat{\psi}$ pour écrire

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\psi'}(p)\right|^2 dp = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |ip\widehat{\psi}(p)|^2 dp\,. \tag{5}$$

En mettant (2), (3), (4) et (5) bout à bout, on obtient bien l'inégalité souhaitée.

Démonstration (III)

Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables, la fonction polynômiale de degré 2 :

$$\begin{aligned} t \mapsto &\int_{\mathbb{R}} (|f(x)| + t|g(x)|)^2 \, dx \\ &= t^2 \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx + 2t \int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

est positive sur $\mathbb{R}$, donc a au plus une racine et son discriminant $\Delta \leqslant 0$:

$$4 \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| dx \right)^2 - 4 \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right) \leqslant 0 \,,$$

pour peu que toutes les intégrales convergent.

Démonstration (IV)

Exercice

En inspectant les cas d'égalité de toutes les inégalités de la preuve ci-dessus, montrer qu'on a égalité seulement si c réel et < 0 tel que $\psi'(x) = cx\psi(x)$, puis que $\psi(x) = ae^{-bx^2}$ avec $c = -2b$ et $a \in \mathbb{C}$.