Cours 7. Transformée de Laplace. Convolution.

Mathématiques 4

5 février 2024

Rappels sur les nombres complexes

On rappelle qu'un nombre complexe s'écrit

$$z = x + iy = re^{i\theta}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad r \geqslant 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

On a les formules pour le conjugué et l'inverse

$$\overline{z} = x - iy = re^{-i\theta},$$

$$z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}.$$

On rappelle le produit (caractérisé par $i^2 = -1$)

$$(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx'),$$

$$re^{i\theta} r' e^{i\theta'} = rr' e^{i(\theta + \theta')}.$$

On a également parfois besoin des formules d'Euler (à réviser cf. TMB) :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta); \; \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \; \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Fractions rationnelles (I)

Si $Y(s)$ est une fonction rationnelle, $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ pour deux polynômes p et q, avec le degré de q qui est strictement plus grand que le degré de p (et p et q premiers entre eux), on peut décomposer $Y(s)$ en éléments simples : le théorème fondamental de l'algèbre nous dit qu'il existe (des racines *complexes* de q) $s_1, \cdots s_k$ tels que $q(s) = a(s - s_1)^{m_1} \cdots (s - s_k)^{m_k}$. Il s'en suit qu'on peut décomposer $Y(s)$ ainsi

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s - s_i)^j}.$$

Fractions rationnelles (II)

Si $Y(s)$ est une fonction rationnelle, $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ avec p, q des polynômes à coefficients réels (toujours avec le degré de q qui est strictement plus grand que le degré de p et p et q premiers entre eux). Si $s_0 = a + ib$ est racine complexe de q alors c'est aussi le cas du conjugué $\overline{s_0} = a - ib$ (et $(s-(a+ib))(s-(a-ib)) = (s-a)^2 + b^2$). Donc si $s_1, \cdots s_l$ sont les racines réelles de q, on a des nombres $a_1, b_1, \cdots a_\lambda, b_\lambda$ réels tels que

$$q(s) = a(s-s_1)^{m_1} \cdots (s-s_l)^{m_l}((s-a_1)^2 + b_1^2)^{n_1} \cdots ((s-a_\lambda)^2 + b_\lambda^2)^{n_\lambda}.$$

On peut montrer qu'on peut décomposer $Y(s)$ ainsi

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j} + \sum_{i=1}^{\lambda} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{b_{i,j} + s c_{i,j}}{(((s-a_i)^2 + b_i^2))^j}.$$

Les coefficients $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ sont uniquement déterminés.

Transformée de Laplace

Definition

Pour une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ (ou bien une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = 0$ si $x < 0$) mesurable, on pose

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

pour $s \in \mathbb{R}$ (pourvu que l'intégrale existe). En particulier, si en $+\infty$, $f(t) = O(e^{at})$, alors $\mathcal{L}[f](s)$ existe pour $s > a$.

Formules calculatoires

Théorème

[Propriétés de bases de la transformée de Laplace] Les formules suivantes sont vraies dès que tous les termes ont un sens :

1. (Linéarité) $\mathcal{L}[f+g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$ et $\mathcal{L}[cf] = c\mathcal{L}[f]$ pour $c \in \mathbb{C}$.
2. (Retard fréquentiel) Si $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}[e^{at}f](s) = \mathcal{L}[f](s-a)$.
3. (Produit par t) Si à l'infini, $f(t) = O(e^{at})$, alors pour $s > a$: $\mathcal{L}[tf(t)](s) = -(\mathcal{L}[f])'(s)$.
4. (Dérivée) Si à l'infini, $f(t) = O(e^{at})$ et $f'(t) = O(e^{at})$, alors pour $s > a$,
   $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$.
5. (Convolution) Si f, g positives, en posant $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$, on a : $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s)$

Dans le dernier point, on considère $f, g \equiv 0$ pour $x < 0$ donc :

$$(f * g)(t) = \int^{+\infty} f(s)g(t-s)ds = \int^{t} f(s)g(t-s)ds = \int^{t} f(t-s)g(s)ds.$$

Exemples de référence

Exemple

On a

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

En effet, pour $n = 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s}$. Puis par le théorème précédent, point 3, et par récurrence :

$$\mathcal{L}[t^n](s) = -\mathcal{L}[t^{n-1}]'(s) = -\left(\frac{(n-1)!}{s^n}\right)' = +\frac{n!}{s^{n+1}}$$

Exemple

En général, la plupart des exemples sont des sommes de séries entières de type $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ et la transformée de Laplace (pourvu qu'elle fasse sens) est $\mathcal{L}[f](s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{s^{n+1}}$ au moins pour s grand.

Exercices (I)

$$\mathcal{L}[e^{at}t^n](s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}. \tag{1}$$

$$\mathcal{L}[e^{at}\cos(\omega t)](s) = \frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}. \tag{2}$$

Avec le retard fréquentiel, il suffit de traiter le cas $a = 0$. On écrit $\cos(\omega t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(\omega t)^{2k}}{(2k)!}$ donc la formule des séries s'applique avec $a_{2n} = \omega^{2n}(-1)^n$, $a_{2n+1} = 0$ d'où

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\omega^{2k}}{s^{2k}} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{+\infty}[-\omega^2 s^{-2}]^{n+1} = \frac{1}{s(1+\omega^2 s^{-2})} = \frac{s}{\omega^2+s^2}$$

par identification d'une série géométrique si $|\omega^2 s^{-2}| < 1$, soit en particulier pour $s > |\omega|$.

Exercices (II)

$$\mathcal{L}[e^{at}\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}. \tag{3}$$

Pour varier les méthodes, obtenons maintenant ce résultat par calcul direct :

$$\mathcal{L}[e^{at}\sin(\omega t)](s) = \frac{1}{2i}(\mathcal{L}[e^{(a+i\omega)t}](s) - \mathcal{L}[e^{(a-i\omega)t}](s))$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{(s-a+i\omega)-(s-a-i\omega)}{(s-a-i\omega)(s-a+i\omega)}\right) = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}.$$

Inverser la transformation de Laplace

La formule d'inversion de la transformation de Laplace est en général trop compliquée pour ce cours. En pratique, cette inversion se fait a l'aide des tables d'exemples : on connaît les transformées de Laplace de certaines fonctions et on essaie de se ramener à ces cas à l'aide des propriétés algébriques.

Exercice

Soit $Y(s) = \frac{b}{(s-a)^n}$, trouver f telle que $\mathcal{L}[f] = Y$.

On identifie dans l'exemple 1 $f(t) = \frac{bt^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$ (pour $t \geqslant 0$).

Application à la résolution d'EDO (I)

On traite 2 exemples. On peut se reporter à `http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/~kellendonk/Arbeiten/Math4-2018-cours-resume.pdf` pour une solution générale.

Exemple

$$af'(t) + bf(t) = g(t),\ \ t > 0, f(0) = c.$$

Soit $Y(s) = \mathcal{L}[f](s)$. On a vu que $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$. Donc utilisant l'équation, on veut que

$$\mathcal{L}[g](s) = a\mathcal{L}[f'](s) + b\mathcal{L}[f](s) = (as + b)\mathcal{L}[f](s) - af(0).$$

Donc on trouve

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{\mathcal{L}[g](s) + af(0)}{as + b}.$$

L'inversion de la transformée de Laplace donne f.

Encore un exemple

Exemple

$$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = g(t), \quad t > 0, \quad f(0) = d, \quad f'(0) = e.$$

Soit $Y(s) = \mathcal{L}[f](s)$. Comme $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$, en itérant :

$$\mathcal{L}[f''](s) = s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f](s) - f'(0) - sf(0)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g](s) &= a\mathcal{L}[f''](s) + b\mathcal{L}[f'](s) + c\mathcal{L}[f](s)\\ &= (as^2 + bs + c)\mathcal{L}[f](s) - af'(0) - asf(0) - bf(0).\end{aligned}$$

Donc on trouve avec les conditions initiales de l'énoncé que

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{\mathcal{L}[g](s) + (as + b)f(0) + af'(0)}{as^2 + bs + c}.$$

L'inversion de la transformée de Laplace donne f.

Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

Il n'est pas facile en général de lire des propriétés qualitatives de f à partir de celles de sa transformée de Laplace ou inversement. On a cependant le résultat suivant.

Théorème

Soit f bornée à l'infini et si les limites existent :

$$\lim_{s \to +\infty} s\mathcal{L}[f](s) = \lim_{t \to 0^+} f(t), \qquad \text{(valeur initiale)}$$

$$\lim_{s \to 0^+} s\mathcal{L}[f](s) = \lim_{t \to +\infty} f(t) \qquad \text{(valeur finale)}$$

Convolution et Transformée de Fourier : motivation (I)

Nous avons vu la notion de série de Fourier. Par exemple pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique, on a obtenu une décomposition en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}\,,$$

où les coefficients de Fourier (complexes) $c_n(f)$ sont obtenus par les intégrales

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)dx.$$

Cela nous a permis de résoudre des équations aux dérivées partielles (comme l'équation de la chaleur, l'équation de Laplace, l'équation des ondes) dans le cas périodique ou sur des intervalles $[0, L]$ avec conditions de bords en étendant par périodicité.

Convolution et Transformée de Fourier : motivation (II)

Si l'on veut résoudre ce type d'équations sans périodicité, on a besoin de fonctions de base de périodes différentes : les ondes planes, pas seulement e^{inx} de fréquence n, mais aussi e^{ipx} pour p réel (onde plane d'impulsion ou fréquence p). Dans ce cas, on va analyser la fonction en fréquence (variable p), mais au lieu d'obtenir une suite, on va obtenir une fonction de p : la transformée de Fourier. C'est finalement une fonction définie par une intégrale à paramètre p, la fréquence. La reconstruction de la fonction de départ sera donnée par la formule d'inversion de Fourier, qui fera intervenir une intégrale au lieu d'une somme.

Pour comprendre la transformée de Fourier d'un produit, il est aussi naturel d'introduire dans ce chapitre une notion de produit de convolution. On rappelle que $L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}, \lambda)$ est l'espace des fonctions intégrables, c'est à dire $f \in L^1(\mathbb{R})$ si f est mesurable et si

$$||f||_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty.$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a déjà expliqué qu'on peut définir sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ via

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x) dx.$$

On la note aussi parfois $\mathcal{F}(f)$ au lieu de $\hat{f}$. On veut définir également l'intégrale suivante à paramètre x :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \,,$$

pourvu que l'intégrale existe. C'est bien le cas si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, d'après le théorème suivant, qui rassemble les deux situations les plus simples.

Théorème

[Définition de la convolution]

1. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. La *convolution* de f et g est la fonction donnée par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \, .$$

En particulier, le théorème de Fubini assure alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.

2. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et g (mesurable) bornée par $C > 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. La *convolution* $f * g$ de f et g est la fonction donnée par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \, .$$

On a alors $f * g$ est bornée avec $|f * g(x)| \leqslant C||f||_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème

[Propriétés de base de la convolution] Si f, g, h sont dans $L^1(\mathbb{R})$, on a :

1. (Commutativité) $(f * g) = (g * f)$.
2. (Associativité) $(f * g) * h = f * (g * h)$.
3. (Linéarité)
   $f * (g + h) = f * g + f * h, f * (cg) = c(f * g)$ pour tout $c \in \mathbb{C}$.
4. Si f est $\mathcal{C}^1$ (avec f, f' bornées, par exemple c'est le cas si f est nulle en dehors d'un borné). alors $f * g$ est $\mathcal{C}^1$ et $(f * g)' = f' * g$.
5. $\widehat{f * g}(p) = \hat{f}(p)\hat{g}(p)$.
6. $\widehat{fg}(p) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(p)$.

Les points 4 et 5 sont les calculs clefs motivant la définition de la convolution.