Cours 7. Rappels complexes et éléments simples.

Mathématiques 4

5 février 2024

Rappels sur les nombres complexes

On rappelle qu'un nombre complexe s'écrit

$$z = x + iy = re^{i\theta}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad r \geqslant 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

On a les formules pour le conjugué et l'inverse

$$\overline{z} = x - iy = re^{-i\theta},$$

$$z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}.$$

On rappelle le produit (caractérisé par $i^2 = -1$)

$$(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx'),$$

$$re^{i\theta} r' e^{i\theta'} = rr' e^{i(\theta + \theta')}.$$

On a également parfois besoin des formules d'Euler (à réviser cf. TMB) :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta); \ \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \ \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Rappels sur les polynômes (I)

Si q est un polynôme à valeurs complexes, le théorème fondamental de l'algèbre nous dit qu'il existe (des racines *complexes* de q) $s_1, \cdots s_k$ tels que $q(s) = a(s - s_1)^{m_1} \cdots (s - s_k)^{m_k}$.

Fractions rationnelles (I)

Dans le cas complexe, on peut donc décomposer $Y(s)$ ainsi :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{a_{i,1}}{(s - s_i)} + \cdots + \frac{a_{i,m_i}}{(s - s_i)^{m_i}} \right).$$

en d'autres mots :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s - s_i)^j}.$$

Rappels sur les polynômes (II)

Si q est à valeurs réelles, la situation est plus délicate. Si $s_0 = a + ib$ est racine complexe de q alors c'est aussi le cas du conjugué $\overline{s_0} = a - ib$ (et $(s - (a + ib))(s - (a - ib)) = (s - a)^2 + b^2)$ (avec le même degré). Donc si $s_1, \cdots s_l$ sont les racines réelles de q, on a des nombres $a_1, b_1, \cdots a_\lambda, b_\lambda$ réels tels que

$$q(s) = a(s - s_1)^{m_1} \cdots (s - s_l)^{m_l}((s - a_1)^2 + b_1^2)^{n_1} \cdots ((s - a_\lambda)^2 + b_\lambda^2)^{n_\lambda}.$$

Fractions rationnelles (II)

Si $Y(s)$ est une fonction rationnelle, $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ avec p, q des polynômes à coefficients réels (toujours avec le degré de q qui est strictement plus grand que le degré de p et p et q premiers entre eux).
On peut montrer qu'on peut décomposer $Y(s)$ ainsi

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s - s_i)^j} + \sum_{i=1}^{\lambda} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{b_{i,j} + s c_{i,j}}{(((s - a_i)^2 + b_i^2))^j}.$$

Les coefficients $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ sont uniquement déterminés.