Cours 6. Intégrales à paramètre.

Mathématiques 4

5 février 2026

Intégrales dépendant d'un paramètre (I)

Dans cette partie E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ (disons $E = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou un ouvert de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$). Soit finalement $A \subset E$ une partie de E et μ une mesure positive sur I (restriction d'une mesure sur $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$).

Definition

Soient $f : A \times I \to \mathbb{C}$ et μ une mesure sur I. On suppose que pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est absolument intégrable, autrement dit $f \in L^1(I, \mu)$. Dans ce cas, on peut poser :

$$F(x) := \int_I f(x,t)\mu(dt)\,.$$

On définit ainsi une *intégrale dépendant d'un paramètre* x la fonction $F : A \to \mathbb{C}$.

Intégrales dépendant d'un paramètre (II)

Exemple

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+x^2t^2}$
Dans ce cas on peut calculer en changeant de variable pour $x \neq 0$ ($F(0) = 1$ est clair) :

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{d(xt)}{1+x^2t^2} = \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}.$$

L'étude des intégrales dépendant d'un paramètre est surtout utile quand on ne peut pas calculer l'intégrale (cas de la convolution, des transformées de Fourier ou de Laplace plus tard).
On peut voir Arctan comme une fonction définie en utilisant une intégrale dépendant d'un paramètre (si on ne connaît pas la fonction tangente pour la définir comme son inverse).

Théorème de continuité avec hypothèse de domination

Théorème

Soit $f : A \times I \to \mathbb{C}$.
On suppose :

1. Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$, est mesurable (par exemple continue par morceaux) sur I.
2. Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue en $x_0 \in A$.
3. (Hypothèse de domination) Il existe une fonction intégrable $g : I \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall t \in I, \forall x \in A, \quad |f(x,t)| \leq g(t).$$

Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \int_I f(x,t)dt$ est continue en x_0.

On remarquera que **dans l'hypothèse de domination, la fonction g ne dépend pas du paramètre** x, seulement de la variable d'intégration t. On remplace souvent 1 et 2 par "f continue sur $A \times I$".

Transformée de Fourier

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Sa *transformée de Fourier* est définie par

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ipx} dx.$$

Par le théorème ci-dessus, elle est continue sur $\mathbb{R}$, utilisant notamment la domination

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \forall p \in \mathbb{R}\,, \quad |f(x)e^{-ipx}| = |f(x)||e^{-ipx}| \leq |f(x)|\,,$$

puis que f est intégrable (plus de détails aux chapitres suivants).

Transformée de Fourier : généralisation

On verra plus tard le cas où f n'est pas intégrable donné par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, on peut alors calculer (comme intégrale impropre pour $p \neq \pm 1$)

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ipx} dx = \pi 1_{[-1,1]}(p),$$

qui n'est clairement pas continue. L'hypothèse de domination est donc nécessaire dans l'exemple précédent, et donc aussi dans le théorème 4.

Dérivation selon le paramètre

Théorème

[Théorème de dérivations successives] Soit $f :]a, b[\times I \to \mathbb{R}$ avec f une fonction de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, c'est à dire f est k fois dérivable avec toutes ses dérivées continues).
On suppose qu'il existe $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_k$ intégrables sur I telles que pour $p = 0, ..., k$:

$$\forall x \in]a, b[, \forall t \in I \left| \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) \right| \leq \phi_p(t).$$

Alors $x \mapsto F(x) := \int_I f(x, t) d\mu(t)$ est C^k sur $]a, b[$ et pour $p \leq k$:

$$\frac{d^p F}{dx^p}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) d\mu(t).$$

(« la dérivée p-ème de l'intégrale par rapport au paramètre est l'intégrale de la dérivée (partielle) p-ème par rapport au paramètre »)

Exemple de la Gaussienne (I)

Exercice

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$.
Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, +\infty[$

$$|e^{-t^2} \cos(tx)| \leq e^{-t^2/2} \leq g(t) = e^{1/2-t},$$

car

$$(t-1)^2 \geq 0 \iff t^2 - 2t + 1 \geq 0 \iff \frac{t^2}{2} \geq t - 1/2$$

pour $t \geq 0$; comme g est intégrable $\int_0^{+\infty} g(t) dt = e^{1/2}$, on déduit du théorème de comparaison I que $f(t,x) = e^{-t^2} \cos(tx)$ est intégrable en t sur $[0, +\infty[$ pour tout x fixé. La fonction F est donc bien définie.

Exemple de la Gaussienne (II)

Exercice

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$.
Montrer que F est continûment dérivable et exprimer $F'(x)$, puis que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) + xF(x)/2 = 0$.

f est $\mathcal{C}^1$ et dominée par g indépendante de x ; il faut aussi dominer sa dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = -te^{-t^2} \sin(tx)$. Or $te^{-t^2/2}$ est bornée par C (continue et tend vers 0 en $\pm\infty$ ou max atteint pour $e^{-t^2/2}(1-t^2) = 0$ en $t = 1$, minimum atteint en $t = -1$, donc bornée par $C := e^{-1/2}$) donc on a la domination $\left|\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\right| = |te^{-t^2} \sin(tx)| \leq Ce^{-t^2/2} \leq Cg(t)$. Par le théorème de dérivation F est $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-t^2} \sin(tx) dt.$$

Exemple de la Gaussienne (III)

Exercice

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) + xF(x)/2 = 0$.

On intègre par parties $u(t) = e^{-t^2}$, $u'(t) = -2te^{-t^2}$, $v(t) = \sin(tx)$, $v'(t) = x\cos(tx)$, ce qui donne

$$F'(x) = \frac{1}{2}[e^{-t^2}\sin(tx)]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = 0 - \frac{x}{2}F(x).$$

Exemple de la Gaussienne (IV)

Exercice

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx)dt$.
Montrer que la fonction G donnée par $G(x) = e^{\frac{x^2}{4}} F(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$ puis conclure que $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On calcule $G'(x) = e^{\frac{x^2}{4}} \left(F'(x) + \frac{x}{2} F(x) \right) = 0$, puis on passe en polaire puis on pose $u = r^2$:

$$G(0)^2 = F(0)^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^2-s^2} dtds = \int_0^{+\infty} dr \int_0^{\pi/2} d\theta e^{-r^2} r$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{+\infty} due^{-u} = \frac{\pi}{4}.$$

Théorème de Fubini

Dans ce résultat important, au lieu d'intervertir intégrale et dérivée, on intervertit intégrale et intégrale. Ici I, J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et μ, ν des mesures positives sur I, J respectivement.

Théorème

[Théorème de Fubini] Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable

1. (Fubini-Tonelli) si $f \geq 0$ alors on a égalité des nombres dans $[0, +\infty]$:

$$\int_J d\nu(y) \int_I d\mu(x) f(x,y) = \int_I d\mu(x) \int_J d\nu(y) f(x,y)$$

2. (Fubini) Si $\int_J d\nu(y) \int_I d\mu(x) |f(x,y)| < +\infty$ alors

$$\int_J d\nu(y) \int_I d\mu(x) f(x,y) = \int_I d\mu(x) \int_J d\nu(y) f(x,y).$$

Théorème de convergence dominée

Le résultat suivant est le fondement de l'étude des intégrales à paramètres. On se restreint au cas de $\mathbb{R}$ mais le cas $\mathbb{R}^n$ est similaire. Soit μ une **mesure positive** sur $\mathbb{R}$.

Théorème

[Théorème de convergence dominée de Lebesgue TCD] Soit $f_n : I \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables telle que $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$ pour (presque) tout x. On suppose qu'il existe une fonction g intégrable sur I telle que

$$\forall t \in I\,, \qquad |f_n(t)| \leq g(t) \quad \text{(condition de domination)},$$

alors f est intégrable et

$$\int_I f d\mu = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu \quad \text{vaut} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n d\mu.$$

L'hypothèse de domination est importante : voir l'exemple suivant.

Exemple

Exemple

Soit $f_n = 1_{[n,n+1]}$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1$. On a $f_n(x) \to 0 = f(x)$ quand $n \to +\infty$, mais

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0 < \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1.$$

La plus petite domination g des f_n indépendante de n est donnée par $g(x) = \sup_n f_n(x) = 1_{[0,+\infty[}$ et n'est pas une domination intégrable, i.e. $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = +\infty$. Le théorème ne s'applique **pas**.

Preuve du théorème de continuité des intégrales à paramètres

L'hypothèse de domination garantit que $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable. Soit $x_n \in A$ tel que $x_n \to x_0$. Par continuité de $x \mapsto f(x,t)$, pour chaque t, $f(x_n,t) \to f(x_0,t)$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure $\lim_{n\to+\infty} \int_I f(x_n,t)dt = \int_I f(x_0,t)dt$.

Un meilleur résultat de dérivabilité des intégrales à paramètres

Soit $f : U \times I \to \mathbb{C}$ avec $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $i \in \{1, ..., n\}$. On suppose :

1. Pour tout $x \in U$, $t \mapsto f(x,t)$, est intégrable sur I.
2. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ admet une i-ème dérivée partielle sur U et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est mesurable.
3. (Hypothèse de domination) Il existe une fonction intégrable $g : I \to \mathbb{R}_+$ (i.e. $\int_I g(t)\mu(dt) < +\infty$) telle que :

$$\forall t \in I, \forall x \in U, \quad |f(x,t)| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right| \leq g(t).$$

Alors $x \mapsto F(x) = \int_I f(x,t)\mu(dt)$ a une i-ème dérivée partielle sur U et :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\mu(dt).$$

Si de plus, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ est continue pour tout t et i, F est C^1 sur U.