Cours 5. Intégrale généralisée

Mathématiques 4

5 février 2024

Rappels sur les primitives et les intégrales sur un segment

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Definition

Une primitive sur I d'une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $F : I \to \mathbb{R}$ telle que la dérivée F' de F satisfait $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Rappel : si F est une primitive et c est une constante $F + c$ est encore une primitive. Et il n'y en a pas d'autres !

Théorème fondamental de l'analyse

L'intégrale d'une fonction continue (ou continue par morceaux) a été définie en TMB par limite de sommes de Riemann. Mais dans la pratique, on utilise des primitives connues et on utilise le *théorème fondamental de l'analyse* :

Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle fermé et borné I (aussi appelé segment). Soit F une primitive de f, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Quelques primitives classiques vues en TMB

$$1) \int x^3 dx, \qquad 2) \int \sin x \cos x dx, \qquad 3) \int \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

1. C'est une primitive usuelle $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (on oublie souvent le c pour désigner *une* primitive plutôt que *toutes* les primitives).
2. On utilise une dérivée d'un produit $u(x) = \sin(x)$, $u'(x) = \cos(x)$ la dérivée de $\frac{(u(x))^2}{2}$ est $u(x)u'(x)$ donc
$$\int \sin x \cos x dx = \frac{(u(x))^2}{2} = \frac{\sin^2(x)}{2}$$
3. Même méthode avec $u(x) = \ln(x), u'(x) = 1/x$ donc une primitive sur $]0, +\infty[$ est
$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

Quelques primitives classiques vues en TMB (suite)

$$4)\ \int x\sin(x)dx, \qquad 5)\ \int x\cos(x)dx, \qquad 6)\ \int xe^x dx\,.$$

1. On fait une intégration par partie : $u(x) = x, v'(x) = \sin(x)$, soit $v(x) = -\cos(x), u'(x) = 1$:

$$\int v'(x)u(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$
$$= -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x).$$

2. De même on obtient :

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) + \cos(x),$$

3. De même on obtient :

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x.$$

Intégrales impropres

Pour une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I qui ne contient pas toutes ses bornes ou qui n'est pas borné, l'intégrale impropre est définie de l'une des manières suivantes.

1. Dans le cas $I = [a, b[$ avec $a < b$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$$
2. Dans le cas $I =]a, b]$ avec $a < b$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$$
3. Dans le cas $I =]a, b[$ avec $a < b$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ on fixe un $c \in]a, b[$ et on pose
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Intégrales impropres (suite)

Ces définitions s'appliquent dès que les limites existent et sont finies. On dit alors que l'intégrale est **convergente**.
Dans cette partie du cours, on s'occupera surtout du cas $I = [a, b[$ puisque le cas $I =]a, b]$ est similaire. Le cas le plus simple est le cas suivant (car on va disposer de théorèmes de comparaison avec des fonctions *positives* de références) :

Definition

Une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I (comme dans la définition précédente) est dite **intégrable** sur I si $\int_a^b |f(x)|dx$ est convergente.

Dans ce cas, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est convergente et on dit même alors qu'elle est **absolument convergente**.

Exemples de référence (à *très bien* connaître)

- $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge et vaut 1. En effet, $\int_0^A e^{-x}dx = 1 - e^{-A} \to 1$ quand $A \to +\infty$.
  Plus généralement, $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ **converge ssi** $a > 0$**, et vaut alors** $1/a$.

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ **converge si et seulement si** $\alpha > 1$ **et vaut alors**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{\alpha - 1}, \ \textbf{pour } \alpha > 1.$$

  La fonction intégrée étant positive, on écrit parfois

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt = +\infty \text{ pour } \alpha \leq 1,$$

  pour dire que cette intégrale diverge.

Exemples de référence (à *très bien* connaître) (II)

- Si $\alpha \neq 1$, $\int_1^A t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^A = \frac{A^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}$ et $A^{-\alpha+1} \to 0$ quand $A \to +\infty$ pour
$$-\alpha + 1 < 0 \iff \alpha > 1$$
or $A^{-\alpha+1} \to +\infty$ quand $A \to +\infty$ pour $\alpha < 1$.

- Si $\alpha = 1$, $\int_1^A \frac{1}{t} dt = \ln(A) \to +\infty$ quand $A \to +\infty$.

Exemples de référence (à *très bien* connaître) (III)

- $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ **converge si et seulement si** $\alpha < 1$ **et vaut alors**

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}, \text{ pour } \alpha < 1\,.$$

La fonction intégrée étant positive, on écrit parfois

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = +\infty \text{ pour } \alpha \geq 1,$$

pour dire que cette intégrale diverge.
En effet si $\alpha \neq 0$, on a $\int_a^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1-a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ et $a^{-\alpha+1} \to +\infty$ quand $a \to 0^+$ pour $\alpha > 1$, tandis que $a^{-\alpha+1} \to 0$ quand $a \to 0^+$ pour $\alpha < 1$.
Si $\alpha = 1$, on a $\int_a^1 \frac{1}{t} dx = |\ln(a)| \to +\infty$ quand $a \to 0^+$.

Exemples de référence (à *très bien* connaître) (IV)

- Attention toutefois : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = +\infty$ diverge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (en combinant les 2 points précédents).

- $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)} dt$ **diverge**.
  En effet, on a $\int_e^{A} \frac{1}{t \ln(t)} dt = [\ln(\ln(t))]_e^A = \ln(\ln(A)) - \ln(1) \to +\infty$ quand $A \to +\infty$.

- $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)^\beta} dt$ **converge si et seulement si** $\beta > 1$ **et vaut alors** $\frac{1}{\beta - 1}$ (voir TD exo facultatif).

Théorèmes de comparaison (I)

On regarde une fonction continue par morceaux $f : I = [a, b[\to \mathbb{R}$ et on étudie la nature de l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$.
On cherche une fonction continue par morceaux positive $g : I = [a, b[\to [0, +\infty[$ appropriée et on compare f à g. Les deux résultats de base à utiliser sont les suivants.

Théorème de comparaison. (I)

1. Si $f(x) = O\left(g(x)\right)$ quand $x \to b^-$ et si $\int_a^b g(x)dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)dx$ converge (absolument).
2. Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [M, b[$ et si $\int_a^b g(x)dx = +\infty$ (i.e. diverge), alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Théorème de comparaison (II).

On considère toujours une fonction continue par morceaux positive $g : I = [a, b[\to [0, +\infty[$ appropriée et on compare f à g.

Théorème de comparaison. (II)

Supposons que $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to b^-$. Alors,

1. si $\int_a^b g(x)dx$ converge alors $\int_a^b f(x)dx$ converge ;
2. si $\int_a^b g(x)dx = +\infty$ diverge alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Exemples

Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$1/ \int_1^{+\infty} \frac{1 - \sin x}{x^2} dx, \quad 2/ \int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x} dx$$

1. Pb de convergence en $+\infty$ (continue en 1 limite $(1 - sin(1))$), on a

   $$\left| \frac{1 - \sin x}{x^2} \right| \leq 2g(x) := \frac{2}{x^2}.$$

   Par le théorème de comparaison II, l'intégrale converge absolument.
2. Pb de convergence en $+\infty$ (continue en 1 limite $(sin(1)/1)$) ;
   l'équivalent simple à l'infini est $1/x^2$.
   Par le théorème de comparaison II, l'intégrale converge absolument.

Exemples (suite)

Etudier la nature de :

$$3/ \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

Pb de convergence en $+\infty$ (continue en 1 limite $0/1$) pour $x \geq e$, $\ln(x) \geq 1$ donc $\frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc par le théorème de comparaison I

$$\int_e^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} dx = +\infty$$

et donc vu que $\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} dx$ finie, on déduit $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} dx = +\infty$.

Une méthode pour le cas non intégrable : l'intégration par parties

Quand une intégrale fait intervenir une fonction "oscilantes" bornée ayant une primitive bornée, il peut être utile d'utiliser une intégration par parties (ou plusieurs) pour se ramener à une intégrale absolument convergente. Cela permet de voir de la compensation un peu comme dans les séries alternées.

Un cas typique est

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \, .$$

Intégrabilité de $\sin(x)/x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Quand $x \to 0$, $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ donc $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge.
2. Calculons donc $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\sin(x)}{x} dx$ en intégrant par parties :

$$\int_1^t \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{-\cos(t)}{t} + \frac{\cos(1)}{1} - \int_1^t \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

Or $\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $\int_1^t \frac{\cos(x)}{x^2} dx \to_{t\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$. De plus $\frac{\cos(t)}{t} \to_{t\to+\infty} 0$ d'où :

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\cos(1)}{1} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

et on a donc montré la convergence de l'intégrale de départ.

Intégrales impropres : fin

On peut montrer que l'intégrale suivante est divergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \, .$$

Donc une intégrale convergente n'est pas nécessairement absolument convergente !

Par ailleurs, on peut montrer la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \, .$$

En effet, avec le changement de variables $y = x^2$ on se ramène à

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{\sqrt{y}} \, dy$$

qui se traite comme l'intégrale impropre de $\sin(y)/y$.

Donc le fait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ soit convergente n'implique pas nécessairement que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Masse de Dirac en a

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue, on pose $\delta_a(f) = f(a)$. Cet objet (techniquement une mesure positive est appelé *mesure de Dirac*).

Approximations de la masse de Dirac (1)

Exemple

(Masse de Dirac approchée par une fonction en forme de bosse et intuition physique)
Soit ρ une fonction supportée sur $[-1, 1]$ positive avec $\int_{-1}^{1} \rho(x)dx = 1$ (par exemple $\rho(x) = 1 + x$ si $x < 0$, $\rho(x) = 1 - x$ si $x > 0$).
Soit $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ est à support $[-1/n, 1/n]$.
On voit que ce changement d'échelle revient à regarder une bosse de même masse 1 mais "vue de loin". A la limite $n \to +\infty$, on va regarder de si loin que l'on ne verra plus qu'une "masse ponctuelle".

Approximations de la masse de Dirac (2)

Formellement, on a la limite de mesures

$$\lim_{n \to +\infty} T_{\rho_n} = \delta_0.$$

En effet, on a $T_{\rho_n}(f) = \int_{-1/n}^{1/n} f(x)\rho_n(x)dx$ est proche de $\int_{-1/n}^{1/n} f(0)\rho_n(x)dx = f(0)$ par continuité de f et vu le choix $\int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(x)dx = \int_{-1}^{1} \rho(x)dx = 1$ par changement de variable.

On remarque que $\rho_n(x) \to 0$ si $x \neq 0$ et $\rho_n(0) = n \to +\infty$. Mais la limite simple $g = +\infty 1_{\{0\}}$ a une intégrale nulle $\int g(x)f(x)dx$.

La limite simple ne suffit pas à comprendre la "fonction généralisée" qu'est la mesure de Dirac. L'intégrale $\int f(x)\delta(dx) = f(0)$ est pourtant souvent notée $\int f(x)\delta_0(x)dx$ en physique (**pas** dans ce cours de mathématiques).

Merci de votre attention !