Cours 3. Séries de fonctions

Mathématiques 4

Printemps 2026

0. Rappels séries numériques

Pour les séries numériques, on regarde a_n pour $n \geq n_0$ et on regarde ce que fait la somme $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ quand $n \to +\infty$. Exemples et méthodes à bien connaître :

- Série géométrique : $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. En fait :

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}.$$

- Série de Riemann : $\sum 1/n^a$ converge si et seulement si $a > 1$.
- Comparaison : si $\sum |u_n|$ converge et $v_n = O(u_n)$, $\sum v_n$ converge (absolument).
- Les critères de d'Alembert et Cauchy.

A partir de maintenant, on va introduire un paramètre supplémentaire x. Mais pour comprendre ce qui se passe, il faut maîtriser le contenu de Math 3 (qui est un cas particulier plus simple car rien ne dépend de x et qui est en plus nécessaire pour presque toutes les notions de convergence !)

Séries de fonctions

De la même manière qu'on avait défini les séries numériques à partir des suites numériques, on définit les **séries de fonctions** à partir des suites de fonctions.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions. Donc on s'intéresse à la somme

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

Si x est fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est une suite numérique et donc on peut étudier la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n(x)$.

Définition 1

Soit (f_n) une suite de fonctions (réelle ou complexe). On appelle série de fonctions de terme général f_n et on note $\sum f_n$, la suite de fonctions (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On appelle S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum f_n$.

Remarque

On a

$$S_n(x) = f_0(x) + \cdots + f_n(x).$$

Convergence simple

Définition 2 (Convergence simple)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D. On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur D si la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement sur D.

D'une manière équivalente : la série $\sum f_n$ converge simplement sur D si pour tout $x \in D$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente.

Notation. Si $\sum f_n$ converge simplement sur D vers la fonction S, on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = S(x).$$

Convergence simple

Exemple 1

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Étudions la convergence simple de la série $\sum f_n$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\left|\frac{\sin(nx)}{3^n}\right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}.$$

Comme la série numérique $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente (c'est une série géométrique convergente), on déduit que la série numérique $\sum \frac{\sin(nx)}{3^n}$ est absolument convergente.
Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Convergence simple

Exemple 2 : séries géométriques

Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. La suite $(f_n(z))$ est une suite géométrique de raison z et on a

$$\text{si } z \neq 1,\ S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

$$\text{si } z = 1,\ S_n = n + 1.$$

La série $\sum f_n(z)$ converge si et seulement si $0 \leq |z| < 1$.

Donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Dans ce cas, on peut calculer sa limite simple :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

Convergence uniforme

Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D. On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur D si la suite de fonctions (S_n) donnée par les sommes partielles converge uniformément sur D.

Proposition 1

Toute série de fonctions qui converge uniformément sur D converge simplement sur D.

Remarque

Pour montrer qu'il n'y a pas de convergence uniforme, il suffit d'exhiber une suite (x_n) d'éléments de D telle que $f_n(x_n)$ ne tend pas vers 0.

Exemple 2 : séries géométriques

Reprenons $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. Sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, on a

$$S_n(z) - S(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} = \frac{-z^{n+1}}{1 - z},$$

et donc $\left|S_n(z) - S(z)\right| = \dfrac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} \left(\leq \dfrac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||} \right).$

Comme $\displaystyle\lim_{\substack{|z| \to 1 \\ z \neq 1}} \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} = +\infty$, la série $\sum f_n(z)$ ne converge pas uniformément sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Convergence uniforme

Exemple 2 : séries géométriques

En revanche, elle converge uniformément sur tout disque de la forme $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$ où $0 \leq r < 1$. En effet,

$$\left|S_n(z) - S(z)\right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||} \leq \frac{r^{n+1}}{|1 - r|}$$

et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{r^{n+1}}{|1 - r|} = 0$, on déduit la convergence uniforme.

Convergence uniforme et reste partiel

Définition 4

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement vers S. On appelle suite des restes partiels, la suite $(R_n)_n$ de fonctions définie par

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

R_n est appelé le reste d'ordre n.

Remarque

Remarquons que (R_n) est bien définie et que pour tout $x \in D$,

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$$

et donc en particulier $(R_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.

Convergence uniforme et reste partiel

Proposition 2

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement sur D. Alors elle converge uniformément sur D si et seulement si la suite des restes partiels (R_n) converge uniformément sur D vers la fonction nulle.

Convergence uniforme et reste partiel

Le critère précédent est particulièrement utile lorsqu'on peut majorer le reste d'ordre n. C'est le cas, par exemple, des séries alternées.

Exemple 3

Soit $\sum f_n$ la série de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la série numérique $\sum f_n(x)$ de terme général $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série *alternée* qui satisfait les conditions de la règle des séries alternées : $|f_n(x)|$ est **décroissante** et $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x)| = 0$. Donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Convergence uniforme et reste partiel

Exemple 3

Comme $\sum f_n(x)$ satisfait les conditions de la règle des séries alternées, nous avons la majoration

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

et donc

$$|R_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n+1}.$$

On déduit la convergence uniforme de (R_n) vers 0.
Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

Convergence normale

Soit $f : D \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ une application bornée. On note

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)| < +\infty$$

qu'on appelle la norme de la convergence uniforme de f.

Remarquons que si (f_n) est une suite de fonctions bornées à partir d'un certain rang, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction f si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Convergence normale

Définition 5

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur D si la série numérique à termes positifs $\sum \|f_n\|$ est convergente.

Définition 6

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. On dit que $\sum f_n$ converge absolument sur D si la série de fonctions $\sum |f_n(x)|$ converge simplement pour tout $x \in D$.

Convergence normale

Remarques

- Pour montrer qu'il y a convergence normale, on cherche à majorer $\|f_n\|$ par un réel u_n tel que $\sum u_n$ soit convergente.
- Pour montrer qu'il n'y a pas convergence normale, on cherche à minorer $\|f_n\|$ par un réel positif u_n tel que $\sum u_n$ soit divergente.

Convergence normale

Exemple 1 (suite)

Reprenons $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| \frac{\sin(nx)}{3^n} \right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

et donc

$$\|f_n\| \leq \frac{1}{3^n}.$$

Comme la série numérique $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente, on déduit que la série de fonctions $\sum \frac{\sin(nx)}{3^n}$ est normalement convergente.

Convergence normale

Soit $\sum f_n$ la série de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Pour tout n, $\|f_n\|_\infty = 1/n$ donc la série ne converge pas normalement.
En pratique c'est le seul cas que vous verrez avec convergence uniforme mais pas de convergence normale.

Liens entre les différentes formes de convergence des séries

Convergence normale $\Rightarrow$ Convergence uniforme $\Rightarrow$ Convergence simple

Faire la preuve est un bon exercice (il suffit de comprendre la définition et l'inégalité triangulaire, il n'y a pas d'astuce !)

Rappel

Le terme général d'une série **numérique** convergente tend vers 0. Si ce terme général ne tend pas vers 0, on dit d'ailleurs que la série diverge grossièrement.

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions.

- Si $\sum f_n$ converge simplement, alors (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
- Si $\sum f_n$ converge uniformément, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
- Si $\sum f_n$ converge normalement, alors la suite numérique $(\|f_n\|)$ converge vers 0.

Attention

Les réciproques dans la proposition précédente sont toutes fausses en général... !

Convergence et continuité

Comme les sommes partielles des séries de fonctions présentent des propriétés analogues à celles des suites de fonction, on a aussi :

Théorème 1

Si une séries de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur D vers une fonction S et si chaque f_n est continue sur D, alors S est continue sur D.

Plus précisément, si $\sum f_n$ **converge uniformément** sur D vers S et si chaque f_n est continue en $x_0 \in D$, alors S est continue en x_0.
On a en particulier

$$\lim_{x \to x_0} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \big).$$

Convergence et intégrales

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$. Supposons que $\sum f_n$ **converge uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction S. Alors

- S est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,
- en posant, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt, \ \ F(x) = \int_a^x S(t)\, dt,$$

  la série $\sum F_n$ converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

On a en particulier

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \Big)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_a^b f_n(t)\, dt \Big).$$

Convergence et dérivées

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose :

- que la série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ converge.

Alors la suite $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$; on peut en particulier dériver terme à terme au sens où

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(t).$$

Enfin, si chaque f_n est de classe C^1, il en est de même de f.

Les objets étudiés

1. Ne pas confondre les suites et les séries !
2. Les suites et les séries NUMERIQUES sont des cas particuliers de séries et suites de fonctions.
3. Pour les suites DE FONCTIONS, seulement 2 types de convergence.
4. Pour les séries DE FONCTIONS, il y en a 3 !

Les objets étudiés

1. $u_n \to 0$ n'implique pas que $\sum u_n$ converge ! Ni pour les séries numériques, ni pour les séries de fonctions.
2. Pour les séries de fonctions, la convergence uniforme est (presque) toujours une conséquence de la convergence normale.
3. Pour les suites et surtout pour les séries, la non-convergence uniforme est souvent prouvée avec "la méthode de la suite". Exemples :

$$\sum f_n(x), \; f_n(x) = \sin(nx), \; x \in [0,1].$$

$$\sum f_n(x), \; f_n(x) = 1/nx^3, \; x \in [0,1].$$

Exercice récapitulatif

Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \qquad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^3x^2}. \end{cases}$$

(1) Soit $a > 0$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $D_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}$?
(2) Soit S la limite de la série. Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.
(3) Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et écrire S' comme la somme d'une série. *Indication : considérer* $]0, +\infty[= \cup_{k\geq 1}[1/k, +\infty[$.
(4) Montrer que S est Riemann-intégrable sur $[1, 2]$ et écrire $\displaystyle\int_1^2 S(x)\,dx$ comme la somme d'une série.

Corrigé

(1) On a

$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^3x^2) - nx \times (2xn^3)}{(1+n^3x^2)^2} = \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2},$$

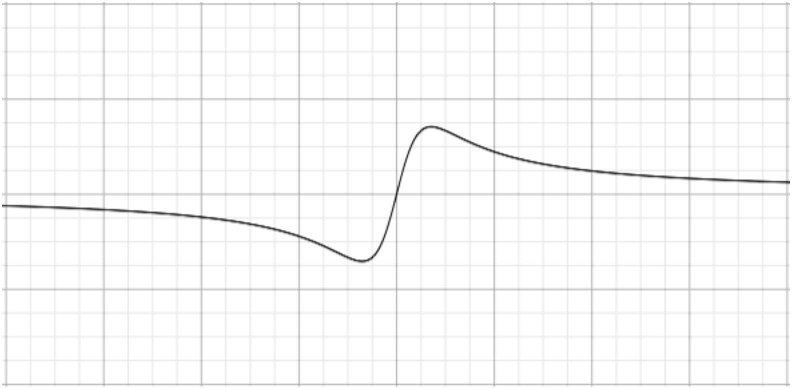
$$f_n'(x) = 0 \text{ ssi } x = \pm\frac{1}{\sqrt{n^3}},$$

$$f_n'(x) \leq 0 \text{ ssi } |x| \geq \frac{1}{\sqrt{n^3}} \text{ ssi } x \in]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n^3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{n^3}}, +\infty[\,.$$

Donc

$$f_n \text{ est décroissante sur }]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n^3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{n^3}}, +\infty[,$$

$$\text{et croissante sur } [-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}].$$



Pour n assez grand,

$$[-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}] \subseteq [-a, a], \ \|f_n\|_D = \sup_{D_a} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{na}{1 + n^3 a^2} \sim \frac{1}{an^2}.$$

Donc la série converge normalement sur D_a.
Sur $\mathbb{R}$, on a

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente. On déduit que la série $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit $x_0 \in]0, +\infty[$. On peut alors choisir $a \in]0, x_0[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en x_0. La série $\sum f_n$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[a, +\infty[$. On conclut que sa limite S est continue en x_0.

(3) Pour pouvoir appliquer le théorème de dérivation des séries, on étudie la convergence uniforme de la série $\sum f_n'$. On a

$$f_n'(x) = \frac{n(1 - n^3 x^2)}{(1 + n^3 x^2)^2}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < 0$ ou $0 < a < b$. On a, pour tout $x \in [a, b]$, $|(1 - n^3 x^2)| \leq |1| + |-n^3 x^2| = 1 + n^3 x^2$ et donc

$$\|f_n'(x)\| \leq \frac{n(1 + n^3 b^2)}{(1 + n^3 a^2)^2}, \text{ si } 0 < a < b,$$

$$\|f_n'(x)\| \leq \frac{n(1 + n^3 a^2)}{(1 + n^3 b^2)^2}, \text{ si } a < b < 0.$$

Or

$$\frac{n(1+n^3\alpha^2)}{(1+n^3\beta^2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha^2}{\beta^4 n^2} \qquad (\alpha, \beta > 0 \text{ fixés})$$

et donc la série $\sum f_n'$ est normalement, puis uniformément convergente sur $[a, b]$.

Comme $\sum f_n$ est normalement convergente, elle est simplement convergente et donc il existe bien $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ est convergente.

Par conséquent, S est dérivable sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2}.$$

(4) La série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[1,2]$ et les f_n sont continues donc Riemann-intégrables, d'où S est Riemann-intégrable sur $[1,2]$. On a ainsi

$$\int_1^2 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2n^2} \ln\left(\frac{1+4n^3}{1+n^3}\right),$$

et donc

$$\int_1^2 S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} \ln\left(\frac{1+4n^3}{1+n^3}\right).$$

MERCI DE VOTRE ATTENTION !