Cours 2. Suites de fonctions

Mathématiques 4

Printemps 2026

0. Rappels suites numériques

Pour les suites numériques, on regarde u_n pour $n \geq n_0$ quand $n \to +\infty$ et on ne somme personne.

Exemples et méthodes à bien connaître :

- Suite géométrique : z^n converge si et seulement si $|z| < 1$ (vers 0) ou $z = 1$ (vers 1).
- Comparaison : si u_n tend vers 0 et $|v_n| = O(u_n)$, v_n tend aussi vers 0.
- Croissance comparée : plein d'exemples :

$$\frac{n^{10}+n^4}{2^n}; \quad \frac{n^2}{\ln n}; \quad \frac{n^4+1}{n^2-1}; \quad \frac{2n^3-n}{n^3+\ln(n)}; \quad \frac{e^n}{ne^n}.$$

Pour les séries numériques, on regarde a_n pour $n \geq n_0$ et on regarde ce que fait la somme $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ quand $n \to +\infty$. Exemples et méthodes à bien connaître :

- Série géométrique : $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. En fait :

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}.$$

- Série de Riemann : $\sum 1/n^a$ converge si et seulement si $a > 1$.
- Comparaison : si $\sum |u_n|$ converge et $v_n = O(u_n)$, $\sum v_n$ converge (absolument).
- Les critères de d'Alembert et Cauchy.

A partir de maintenant, on va introduire un paramètre supplémentaire x. Mais pour comprendre ce qui se passe, il faut maîtriser le contenu de Math 3 (qui est un cas particulier plus simple car rien ne dépend de x et qui est en plus nécessaire pour presque toutes les notions de convergence !)

Suites de fonctions

Une **suite de fonctions** est la donnée d'une suite

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$$

de fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1

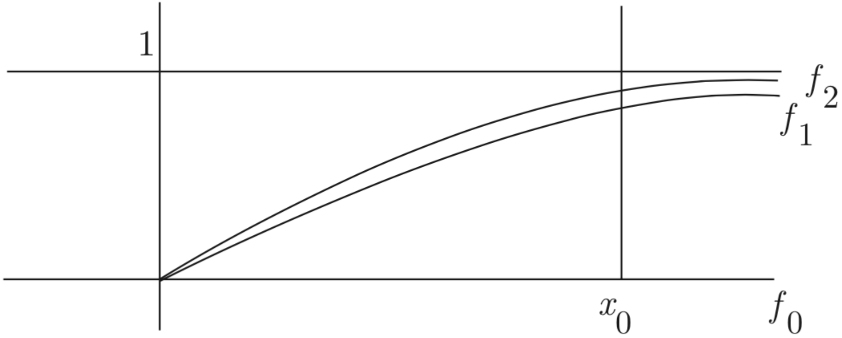
Soit $D \subseteq \mathbb{K}$. Une suite de fonctions de D dans $\mathbb{K}$ est la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une application $f_n : D \mapsto \mathbb{K}$.

Notation. Une suite de fonctions pourra être notée $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(f_n)_n$ ou (f_n).

Exemple 1

Soit $D = [0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D$, on pose

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$



Exemple 2

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = x^n. \end{cases}$$

Remarque

Regarder ce qui se passe sur $[0, 1]$ avec cet exemple !

Convergence

Pour les suites de fonctions, on dispose de plusieurs formes de convergence.

On commence par la plus simple ....

Convergence simple

On a vu qu'une suite numérique peut converger (ou non) vers une limite finie ℓ. De la même manière, on peut étudier la converge d'une suite de fonctions et voir si elle peut *s'approcher* (ou non) d'une fonction "limite" (converger).

Soit $x_0 \in D$ fixé. Alors la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique dont on peut étudier la convergence.

Si pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors on peut définir une *fonction limite* f par

$$f : \begin{cases} D & \to \mathbb{K} \\ x & \mapsto \quad f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x). \end{cases}$$

Convergence simple

Définition 2

Soient $D \subseteq \mathbb{K}$ et (f_n) une suite de fonctions définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que (f_n) converge simplement sur D, si pour tout $x \in D$, la suite numérique $(f_n(x))$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Si (f_n) converge simplement sur D, alors la fonction f définie par

$$f : \begin{cases} D & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \qquad f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \end{cases}$$

est appelée la limite simple de la suite (f_n) sur D.

Convergence simple

Exemple 1 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{array} \right.$$

On a :

- pour $x \in]0,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+nx} = 1$,
- pour $x = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

Donc (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie par

$$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array} \right.$$

Convergence simple

Exemple 2 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = x^n. \end{array} \right.$$

- Si $|x| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.
- Si $x = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$.
- Si $|x| > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} |f_n(x)| = +\infty$, donc $(f_n(x))$ diverge.
- Si $x = -1$, $f_n(x) = (-1)^n$ et donc $(f_n(x))$ n'admet pas de limite.

Donc (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

Remarque

En général, la convergence simple dépend du domaine de définition D de la suite (f_n).

Dans l'exemple précédent, (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$. En revanche, elle converge simplement sur l'intervalle $I =]-1, 1]$ et admet comme limite (simple) l'application f définie par

$$f :]-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Convergence uniforme

Supposons que (f_n) est une suite de fonctions définies de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction f. Donc on suppose qu'il y a déjà une convergence simple.

Dans beaucoup d'applications, on aimerait savoir si une propriété qui est satisfaite pour toutes les fonctions f_n, serait aussi satisfaite par f.
On peut se demander

- si chaque f_n est continue, f est-elle continue ?
- si chaque f_n est dérivable, f est-elle dérivable et a-t-on $f' = \lim_{n \to +\infty} f_n'$?
- si chaque f_n est intégrable, f est-elle intégrable et a-t-on alors $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$?

La convergence simple n'est pas suffisante. On utilisera ici une notion plus forte, qui est la **convergence uniforme**.

Convergence uniforme

Pour $g : D \to \mathbb{R}$ une fonction *majorée* au sens où il existe M tel que $g(x) \leq M$ pour tout $x \in D$, on rappelle que $A := \sup_{x\in D} g(x)$ est le plus petit réel M satisfaisant cette propriété. S'il existe $x \in D$ tel que $A = g(x)$, on dit que A est le *maximum* de g.

Exemple

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par $g(x) = -e^x$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} g(x) = 0$. Ce supremum n'est pas un maximum.

Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement sur D vers la fonction f. On dit que (f_n) converge uniformément sur D vers f si :

- la quantité $u_n = \sup_{x\in D}(|f_n(x) - f(x)|) \in \mathbb{R}$ est finie, au sens où la fonction $x \mapsto |f_n(x) - f(x)|$ est majorée par un réel $M_n < +\infty$, pour tout n assez grand,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Convergence uniforme

En pratique ...

Proposition 1

La suite (f_n) converge uniformément sur D vers f, si et seulement si, il existe une suite réelle (u_n) vérifiant :

- pour tout n assez grand : $\forall x \in D$, $|f_n(x) - f(x)| \leq u_n$,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Remarque

Pour montrer qu'il n'y a pas de convergence uniforme, il suffit d'exhiber une suite (x_n) d'éléments de D telle que $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne tend pas vers 0.

Convergence uniforme

Remarque

Pour montrer la convergence uniforme de (f_n), il faut après avoir trouvé la limite simple f, essayer de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ en fonction seulement de n, indépendamment de x (on dit aussi "uniformément en x").

Exemple 1 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{array} \right.$$

On a vu que (f_n) converge simplement vers f qui est définie par

$$f : D = [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \;\; f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array} \right.$$

Pour tout $x > 0$, on a $|f_n(x) - f(x)| = \left| \dfrac{nx}{1+nx} - 1 \right| = \dfrac{1}{1+nx}$ et $|f_n(0) - f(0)| = 0$.

On a donc $u_n = \sup\limits_{x \in D} \dfrac{1}{1+nx} = 1$ qui ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur D.

Convergence uniforme

Exemple 1 (suite)

En revanche, (f_n) converge uniformément vers f sur tout intervalle de la forme $D = [a, +\infty[$ où $a > 0$.

En effet, pour tout $x \in D$,

$$a \leq x \Rightarrow 1 + na \leq 1 + nx \Rightarrow \frac{1}{1 + nx} \leq \frac{1}{1 + na},$$

donc en posant $u_n = \dfrac{1}{1 + na}$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq u_n,$$

et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, on déduit le résultat.

Convergence et continuité

Théorème 1

Si une suite de fonctions (f_n) **converge uniformément** sur D vers une fonction f et si chaque f_n est continue sur D, alors f est continue sur D.

Plus précisément, si (f_n) **converge uniformément** sur D vers f et si chaque f_n est continue en $x_0 \in D$, alors f est continue en x_0 et on a

$$\lim_{x \to x_0} \big(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \big) = \lim_{n \to +\infty} \big(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \big).$$

Convergence et continuité

Remarque

Attention, la convergence simple n'est pas suffisante pour déduire la continuité de la limite (simple). Reprenons la suite

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{array} \right.$$

dont la limite simple est $f : D = [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array} \right.$

Chaque f_n est continue sur D (en particulier en 0), alors que f n'est pas continue en 0.

Convergence et intégrales

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ **convergeant uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction f. Alors

- f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,
- en posant, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt, \quad F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

  la suite (F_n) converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

En particulier

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\, dt.$$

Convergence et intégrales

Exemple 1 (suite)

Reprenons la suite (où $a > 0$)

$$f_n : \begin{cases} [a, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{cases}$$

dont la limite uniforme est $f : D = [a, +\infty[\to \mathbb{R}, \ \ f(x) = 1.$
Sur $[a, 1]$ on a

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt = (x - a) - \frac{\ln(1 + nx)}{n} + \frac{\ln(1 + na)}{n}, \ F(x) = x - a,$$

et on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n = F$ uniformément.

Convergence et dérivées

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose :

- que la suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge.

Alors la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$.

Enfin, si chaque f_n est de classe C^1, il en est de même de f.