

Vous avez reçu par mail un lien vers la **page du cours**. Vous trouverez notamment sur cette page :

- des informations sur le Cours Magistral CM (références, avancement, transparents du cours).
- des informations sur les Travaux Dirigés TD (feuilles de TD, programme des séances).
- des annales des années précédentes pour vous entraîner **mais le programme et les exigences changent !**
- des informations sur votre évaluation (date et programme du contrôle partiel, coefficients).

- **Venez en CM et en TD et respectez vos groupes ! Sinon vous ratez plein d'informations notamment sur l'organisation !.**
- Contactez-moi si problème **pédagogique** avec un chargé de TD (pas de rappels de cours, soucis de rythme...) Avant tout, on discute : **le changement de groupe n'est pas une option !**
- Les demandes pour passer avec un chargé de TD spécifiques ne sont pas considérées.
- Si problème **grave** avec chargé de TD (paroles déplacées...) il faut contacter la mission appropriée (me demander si nécessaire) et les mesures seront prises.

- Je ne réponds pas systématiquement à certains mails (demandes individuelles non justifiées, plaintes non constructives, demandes sur le sujet d'un contrôle qui arrive...)
- Pour certains mails (demande précision programme, calcul note finale pas compris, soucis page web) je mettrai à jour la page web plutôt que de répondre individuellement.
- Par contre si question cours, souci **long** avec page web ou situation particulière (souci médical ou administratif...) je réponds plutôt vite et n'hésitez pas à me relancer.
- Respectez la forme des mails (politesse minimale) avec moi et avec les chargés de TD.
- **Logiquement, pour l'organisation du cours, le programme du devoir...il faut écrire à moi.** Pour la solution d'un exercice, il faut écrire plutôt aux chargés de TD. Pour les notions du cours, vous faites ce que vous voulez !

- Le but n'est pas de comprendre en profondeur tous les objets.
On n'a pas le temps, ce n'est pas le but principal de votre formation et certains objets sont très difficiles.
- Par contre c'est indispensable de ne pas faire des choses de manière machinale. Par exemple, une suite n'est pas une série, la variable x et la variable t ne jouent pas le même rôle dans $\int_0^x t \, dt\dots$
- En gros : il faut d'abord comprendre avec quoi vous travaillez, ensuite apprendre les théorèmes et faire les calculs correctement.
- **Exercices où vous ne comprenez pas les objets=perte de temps pour vous, déprimant pour nous.**
Si vous vous rendez compte que vous ne connaissez pas la définition, ce n'est pas "stratégique" de faire l'exo !

- Il faut évidemment connaître les objets vus avant. Par exemple, c'est indispensable de connaître les séries numériques avant les séries de fonctions et on peut bien sûr mettre une partie du contrôle sur ça !
- Apprenez les définitions : il y aura des questions de cours !
- Ne stressez pas trop sur des exercices complexes sur les EDP en TD : ce ne sera pas le coeur de votre évaluation !
Pareil pour les preuves des résultats à connaître : si vous connaissez les théorèmes c'est déjà très bien !
- On donnera des indications sur le programme sur la page web du cours. Si quelque chose n'est pas clair, écrivez-moi et je mettrai à jour la page.

Plan général du cours sur le semestre (24h) :

Partie 1 (Suites/séries)

- Révisions : développements limités, équivalents, développements asymptotiques.
- Suites et séries de fonctions.
- Séries de Fourier. Applications aux ÉDP.

Partie 2 (Intégrales)

- Intégrales improches. Intégrales à paramètre.
- Transformée de Laplace et décomposition en éléments simples.
- Produit de convolution et régularisation.
- Transformée de Fourier. Application à l'étude d'ÉDP linéaires.

Cours 1. Relations de comparaison : développements limités, équivalents, développements asymptotiques.

Mathématiques 4, printemps 2026

4 février 2026

Idée générale

Une notion importante est celle de **vitesse de convergence en a** .

Il faut savoir comparer une fonction "compliquée" à une autre fonction plus simple servant de référence, au voisinage de ce a .

C'est le but des relations de comparaisons dont une forme particulièrement utile est appelée développement limité (développement de Taylor).

Pour cela, on introduit le grand O . Il est très utile pour comparer en plus des o et \sim que vous connaissez déjà !

Comparaison en $+\infty$

Dans cette partie, **on suppose connue la notion de limite** (finie ou $\pm\infty$) quand $x \rightarrow +\infty$ (**si besoin, revoir cours terminale ou TMB**).

Définition 1

Soit $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que b est une fonction **bornée en $+\infty$** s'il existe des réels positifs M, C tels que pour tout $x \geq M$, on ait $|b(x)| \leq C$.

NB : on dit parfois *bornée au voisinage de $+\infty$* au lieu de *bornée en $+\infty$* .

Exemple 1

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction tendant vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$: si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$, alors g est bornée en $+\infty$.

Définition 2

Soient f et g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- ① **Négligeabilité.** La fonction f est dite **négligeable en $+\infty$** devant la fonction g et on note $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(g(x))$ ou simplement $f = o_{+\infty}(g)$ s'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel $M > 0$ tels que, pour tout $x \geq M$, on ait

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

- ② **Équivalence.** La fonction f est dite **équivalente en $+\infty$** à la fonction g et on note $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ou simplement $f \sim_{+\infty} g$ s'il existe une fonction $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel $M > 0$ tels que, pour tout $x \geq M$, on ait

$$f(x) = e(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e(x) = 1.$$

- ③ **Domination.** La fonction f est dite **dominée en $+\infty$** par la fonction g et on note alors $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(g(x))$ ou simplement $f = O_{+\infty}(g)$, s'il existe une fonction $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel $M > 0$ tels que, pour tout $x \geq M$, on ait

$$f(x) = b(x)g(x) \quad \text{et } b \text{ est une fonction bornée en } +\infty.$$

A quoi sert la nouvelle notation grand O ?

Le terme de domination est trompeur : par exemple x domine $2x$ à l'infini.
L'intérêt est que les théorèmes de comparaison pour la convergence de séries se réécrivent plus facilement. Plus concrètement, si $v_n \geq 0 \ \forall n$ et si $u_n = O(v_n)$:

$$\sum v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

et réciproquement :

$$\sum u_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge.}$$

Ces résultats sont très utiles et généralisent ceux vus précédemment.
On peut procéder de même pour réécrire les résultats de comparaison vus pour les intégrales.

Comparaison en $+\infty$ (suite)

Remarque 1

Si $\lambda \neq 0$ est une constante alors $f(x) \sim_{x \rightarrow \infty} \lambda$ veux simplement dire qu'on a la limite $f(x) \rightarrow \lambda$ quand $x \rightarrow +\infty$, mais...

Attention !

Aucune fonction usuelle n'est équivalente à 0 !

En effet, $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} 0$ veut dire $f(x) = e(x) \times 0$ pour x assez grand, donc $f(x)$ est identiquement nulle ($= 0$) pour tout x assez grand. Si vous trouvez cette réponse en exercice, votre réponse est presque sûrement fausse !

Comparaison en $+\infty$ (suite)

Une conséquence importante de la définition précédente est la suivante :

Proposition 1

On a : $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(g(x))$.

Les notions ci-dessus sont particulièrement utilisées lorsque la fonction "de référence" g ne s'annule pas pour tout x assez grand, c'est à dire, en reprenant les notations de la précédente définition, lorsqu'on a :

$$\exists M > 0, \quad \forall x \geq M, \quad g(x) \neq 0.$$

Comparaison en $+\infty$ (suite)

Proposition 2

On suppose que $\exists M < +\infty, \forall x \geq M, g(x) \neq 0$.

- ① $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(g(x)) \iff f/g \text{ est bornée sur } [N, +\infty[\text{ pour un certain } N \geq M.$
- ② $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x) = 0.$
- ③ $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x) = 1$

Exemple 2 (révision de terminale/TMB sur les limites)

- ① $x^\alpha =_{x \rightarrow +\infty} o(x^\beta)$ si et seulement si $\alpha < \beta$. En effet $x^\alpha/x^\beta = 1/x^{\beta-\alpha}$ qui tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$ si et seulement si $\beta - \alpha > 0$.
- ② $x^\alpha =_{x \rightarrow +\infty} o(e^{\beta x})$ pour $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$ fixés. En effet $x^\alpha/e^{\beta x} = x^\alpha e^{-\beta x}$ qui tend alors toujours vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$ pour $\beta > 0$.

Comparaison en $+\infty$ (suite)

Exemple 2 (suite)

③ $e^{-\beta x} =_{x \rightarrow +\infty} o(x^\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$ fixés.

En effet $e^{-\beta x}/x^\alpha = x^{-\alpha} e^{-\beta x}$ qui tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$ pour $\beta > 0$.

④ si $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ polynôme avec a_n différent de 0 alors
 $P(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$ car $P(x)/x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^{k-n} =_{x \rightarrow +\infty} a_n + o(1)$.

Un polynôme est équivalent en $+\infty$ à son monôme de plus haut degré !

Exemple 2 (suite)

⑤ $\ln x =_{x \rightarrow +\infty} o(x^\beta)$ pour $\beta > 0$.

En effet, par **croissance comparée**, on a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} = 0$.

Comparaison en $+\infty$ (suite)

Les relations de base suivantes peuvent être utilisées librement. Elles doivent aussi pouvoir être retrouvées rapidement directement à partir de la définition 2.

Proposition 3

Soient f, g, h, k des fonctions.

- ① $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(g(x)) \Rightarrow f(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(g(x)).$
- ② $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \Rightarrow f(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(g(x)).$
- ③ $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(h(x))$ et $g(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(h(x)) \Rightarrow f(x) + g(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(h(x)).$
- ④ $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(h(x))$ et $g(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(k(x)) \Rightarrow f(x)g(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(h(x)k(x)).$
- ⑤ $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(h(x))$ et $g(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(h(x)) \Rightarrow f(x) + g(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(h(x)).$

Comparaison en $+\infty$ (suite)

Proposition 3 (suite)

- ⑥ $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(h(x))$ et $g(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(k(x)) \Rightarrow f(x)g(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(h(x)k(x)).$
- ⑦ $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $g(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} k(x) \Rightarrow f(x)g(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} h(x)k(x).$
- ⑧ $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(g(x))$ et $g(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(h(x)) \Rightarrow f(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(h(x)).$
- ⑨ $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(g(x))$ et $g(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(h(x)) \Rightarrow f(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(h(x)).$
- ⑩ $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(g(x))$ et $g(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(h(x)) \Rightarrow f(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(h(x)).$

Attention

Pas de sommes d'équivalents !

Comparaison en $+\infty$ (suite)

Illustration des deux avertissements précédents (en rouge)

Si $f(x) = x + x^3$, $g(x) = x - x^3$, alors $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} x^3$,
 $g(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} -x^3$ mais $f(x) + g(x) = 2x \not\sim_{x \rightarrow +\infty} 0$. Ce type
d'annulation est la source principale d'erreur donnant des équivalents à 0.

Preuve de la proposition 3

Dans cette preuve de la proposition 3, tout se passe quand $x \rightarrow +\infty$, même si on ne le précise (du coup) pas à chaque fois.

- ① Si $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(g(x))$ alors $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ et $\varepsilon(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $\varepsilon(x)$ est bornée en $+\infty$ (voir exemple 1), ce qui donne bien $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(g(x))$.
- ② Si $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ alors $f(x) = e(x)g(x)$ et $e(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 1$, donc $e(x)$ est bornée en $+\infty$, ce qui donne bien $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(g(x))$ (voir exemple 1).
- ③ Si $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(h(x))$ et $g(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(h(x))$, on a pour x assez grand $f(x) = b(x)h(x)$ et $g(x) = \tilde{b}(x)h(x)$ avec b, \tilde{b} bornées en $+\infty$: on peut donc fixer $M, C > 0$ telles que pour tout $x \geq M$, on ait $|b(x)| \leq C$ et $|\tilde{b}(x)| \leq C$. D'où $f(x) + g(x) = (b(x) + \tilde{b}(x))h(x)$ avec $b + \tilde{b}$ bornée en $+\infty$. On vérifie en effet que

$$\forall x \geq M, \quad |b(x) + \tilde{b}(x)| \leq |b(x)| + |\tilde{b}(x)| \leq 2C,$$

Preuve de la proposition 3 (suite)

ce qui donne bien $f(x) + g(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(h(x))$.

- ④ Si $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(h(x))$ et $g(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(k(x))$, on peut trouver $M, C_1, C_2 > 0$ tels que pour tout $x \geq M$ assez grand

$|f(x)| \leq C_1|h(x)|$ et $|g(x)| \leq C_2|k(x)|$, donc

$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq C_1 C_2|h(x)||k(x)|$ donc

$f(x)g(x) = O(h(x)k(x))$.

→ "donc" : vérifier que la fonction b donnée par

$b(x) = f(x)g(x)/(h(x)k(x))$ si $h(x)k(x) \neq 0$ et par $b(x) = 0$ sinon satisfait $fg = bhk$ et $|b(x)| \leq C_1 C_2$ pour tout $x \geq M$.

- ⑤ Si $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(h(x))$ et $g(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(h(x))$ alors pour x grand, $f(x) = \varepsilon(x)h(x)$ et $g(x) = \eta(x)h(x)$ avec $\lim \varepsilon(x) = \lim \eta(x) = 0$, donc $f(x) + g(x) = (\varepsilon(x) + \eta(x))h(x)$ et comme $\lim(\varepsilon(x) + \eta(x)) = 0$, $f(x) + g(x) = o(h(x))$.

- ⑥ Si $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(h(x))$ et $g(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(k(x))$, on a $f(x) = \varepsilon(x)h(x)$ et $g(x) = b(x)k(x)$ avec $\lim \varepsilon(x) = 0$ et b bornée en $+\infty$: $\exists M, C > 0, \forall x \geq M, |b(x)| \leq C$.

Comparaison en $+\infty$ (suite)

Preuve de la proposition 3 (suite)

D'où pour $x \geq M$, on a $f(x)g(x) = \varepsilon(x)b(x)h(x)k(x)$ et $0 \leq |\varepsilon(x)b(x)| \leq |\varepsilon(x)|C \rightarrow 0$ donc $\varepsilon b \rightarrow 0$ par théorème d'encadrement (ou des "gendarmes"), et on conclut bien que $f(x)g(x) = o(h(x)k(x))$.

- ⑦ Si $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $g(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$, on a $f(x) = e_1(x)h(x)$ et $g(x) = e_2(x)k(x)$ avec $e_1(x) \rightarrow 1$ et $e_2(x) \rightarrow 1$ donc $f(x)g(x) = e_1(x)e_2(x)h(x)k(x)$ et $e_1(x)e_2(x) \rightarrow 1$, donc $f(x)g(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} h(x)k(x)$.
- ⑧ Si $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(g(x))$ et $g(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(h(x))$, on a donc pour x grand $|f(x)| \leq C_1|g(x)|$ et $|g(x)| \leq C_2|h(x)|$, donc $|f(x)| \leq C_1C_2|h(x)|$ et donc $f(x) = O(h(x))$.
- ⑨ Si $f(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(g(x))$ et $g(x) =_{x \rightarrow +\infty} O(h(x))$, on a $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ et $g(x) = b(x)h(x)$ avec $\lim \varepsilon(x) = 0$ et $|b(x)| \leq C$ pour $x \geq M$, d'où $f(x) = \varepsilon(x)b(x)h(x)$ et $0 \leq |\varepsilon(x)b(x)| \leq |\varepsilon(x)|C \rightarrow 0$ donc $f(x) = o(h(x))$. Le dernier cas est similaire.

Comparaison en tout a dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: cas général

Nous rappelons maintenant les comparaisons de fonctions en $a \in \mathbb{R}$ pour déduire des développements de Taylor usuels (cf TMB) les équivalents usuels. Dans les définitions suivantes, on se donne le lieu de comparaison a dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et l'ensemble de définition $D \subset \mathbb{R}$ un sous intervalle de \mathbb{R} satisfaisant soit $D =]A, B[$, $A < a < B$, soit $D =]a, A[$, soit $D =]A, a[$, soit $D =]A, +\infty[$ et alors $a = +\infty$, soit $D =]-\infty, A[$ et alors $a = -\infty$.

On dit aussi que $V \subset D$ est un voisinage de a s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $V =]a, M[$ si $D =]a, A[$, tel que $V =]M, a[$ si $D =]A, a[$ ou tel que $V =]C, C'[\supset a$ si $D =]A, B[$

On suppose dans cette partie que D, a est dans l'un des cas ci-dessus.

Définition 3

Soit $b : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que b est une fonction bornée au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a et un réel positif C tels que pour tout $x \in V$, on ait $|b(x)| \leq C$.

Définition 4

Soient f et g , deux fonctions de D dans \mathbb{R} .

- ① **Domination.** La fonction f est dite **dominée** par la fonction g au voisinage de a et on note $f(x) =_{x \rightarrow a} O(g)$ s'il existe une fonction $b : D \rightarrow \mathbb{R}$ bornée au voisinage de a telle que $f = bg$.
- ② **Négligeabilité.** La fonction f est dite **négligeable** devant la fonction g au voisinage de a et on note $f(x) =_{x \rightarrow a} o(g(x))$ s'il existe une fonction $\varepsilon : D \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ et telle que $f = \varepsilon g$.
- ③ **Équivalence.** La fonction f est dite **équivalente** à la fonction g en a et on note $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ s'il existe une fonction $e : D \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} e(x) = 1$ et telle que $f = eg$.

Comparaison en tout a dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: cas général (suite)

Exemple 3 (révision de terminale/TMB sur les limites, à comparer à 2)

- ① Même si écrire $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow a} 0$ ou $f(x) =_{x \rightarrow a} o(1)$ est fondamentalement la même chose, on verra en TD que la notation "o" est en pratique plus facile à manipuler.
- ② $x^\alpha =_{x \rightarrow 0} o(x^\beta)$ si et seulement si $\alpha > \beta$.
En effet $x^\alpha/x^\beta = x^{\alpha-\beta}$ qui tend vers 0 en 0 si et seulement si $\alpha - \beta > 0$.
- ③ si $P(x) = \sum_{k=I}^n a_k x^k$ polynôme avec a_I différent de 0 alors $P(x) \sim_{x \rightarrow 0} a_I x^I$ car $P(x)/x^I = \sum_{k=I}^n a_k x^{k-I} =_{x \rightarrow 0} a_I + o(1)$.

Un polynôme est équivalent en 0 à son monôme de plus petit degré !

Comparaison en tout a dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: cas général (suite)

On a les mêmes propriétés que pour les relations de comparaison en $+\infty$, en remplaçant $+\infty$ par a . On obtient des équivalents en utilisant les développements limités vus en TMB¹.

Proposition 4 (Équivalents usuels quand $x \rightarrow 0$)

On a :

$$e^x - 1 \sim_{x \rightarrow 0} x, \quad \ln(1 + x) \sim_{x \rightarrow 0} x,$$

$$\sin(x) \sim_{x \rightarrow 0} x, \quad \tan(x) \sim_{x \rightarrow 0} x,$$

$$\cos(x) - 1 \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2}, \quad \frac{1}{1-x} - 1 \sim_{x \rightarrow 0} x,$$

$$(1 + x)^\alpha - 1 \sim_{x \rightarrow 0} \alpha x, \quad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ indépendant de } x),$$

f dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$: $f(x) - f(a) \sim_{x \rightarrow a} f'(a)(x - a)$.

1. <http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/TMB/TMB-livret-2018.pdf> p 38

Exemple 4 (Développements limités)

Une relation $f(x) =_{x \rightarrow a} P(x - a) + o((x - a)^n)$ où P est un polynôme de degré $\leq n$ s'appelle un Développement Limité (DL) d'**ordre** n en $a \in \mathbb{R}$. Vous avez vu en TMB (même référence que ci-dessus, p.39) qu'une fonction f n -fois dérivable sur un petit intervalle ouvert contenant un point $a \in \mathbb{R}$ admet un développement limité d'ordre n en a et on a même alors plus précisément quand $x \rightarrow a$ (formule de Taylor-Young) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{f(a)}_{=f(a) \times (x-a)^0} + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 \\ &\quad + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n). \end{aligned}$$

Il est très important de garder cette relation **ordonnée** et de **ne pas développer** les $(x - a)^k$ pour qu'elle reste significative.

Exemple 5

En particulier, toujours quand $x \rightarrow a$, rechercher un développement limité à l'ordre 0 n'est rien d'autre qu'étudier la limite ou la continuité de la fonction f en a :

$$\begin{aligned} f \text{ admet un DL d'ordre 0} &\iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe (et vaut alors } f(a)) \\ &\iff f \text{ est continue en } a \iff f(x) = f(a) + o(1). \end{aligned}$$

Comparaison en tout a dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: cas général (suite)

De même à l'ordre 1, toujours quand $x \rightarrow a$, écrire un développement limité à l'ordre 1 n'est rien d'autre qu'étudier la dérivabilité d'une fonction f continue en a :

$$f \text{ admet un DL d'ordre 1} \iff \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe } (=f'(a))$$

$$\iff f \text{ dérivable en } a \iff \exists \ell \in \mathbb{R}, f(x) = f(a) + \ell \times (x - a) + o(x - a)$$

$$(\text{et alors } \ell = f'(a)).$$

Comparaison en tout a dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: cas général (suite)

Plus généralement, une conséquence directe des formules de Taylor est la proposition suivante (**à très bien connaître sauf la dernière** et à savoir retrouver ou compléter) :

Proposition 5 (Développements limités usuels quand $x \rightarrow 0$)

$$\frac{1}{1-x} =_{x \rightarrow 0} 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3), \quad \frac{1}{1+x} =_{x \rightarrow 0} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3),$$

$$e^x =_{x \rightarrow 0} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \quad \ln(1+x) =_{x \rightarrow 0} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\sin(x) =_{x \rightarrow 0} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \quad \cos(x) =_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

$$(1+x)^\alpha =_{x \rightarrow 0} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + o(x^3)$$

$(\alpha \in \mathbb{R}$ **indépendant** de x).

Exercices d'application

Les sommes et compositions de DL (permises par les résultats sur les o) sont un substitut avantageux aux sommes d'équivalents. Nous allons voir aussi (et en TD) comment ce point de vue permet de calculer assez facilement certaines limites délicates, en levant les *formes indéterminées*.

Exercice 1

Étudier $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\sin x}{x}$ et en déduire qu'on peut prolonger la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ en une fonction continue sur \mathbb{R} . On appellera dorénavant *sinus cardinal*, notée sinc, cette fonction prolongée.

Solution de l'exercice 1 :

par la proposition 5, on a quand $x \rightarrow 0$ que

$\sin x = x + o(x) = x(1 + o(1))$, et si de plus $x \neq 0$, on obtient

$\frac{\sin x}{x} = \frac{x(1 + o(1))}{x} = 1 + o(1) \rightarrow 1$, par définition de $o(1)$. On en déduit

donc que $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\sin x}{x}$ existe et vaut 1, puis que la fonction sinc donnée par $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $\text{sinc}(0) = 1$ est continue sur tout \mathbb{R} (en particulier en 0).

Exercice 2

Étudier $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Solution de l'exercice 2 :

par la proposition 5, on a quand $x \rightarrow 0$

$$e^x = 1 + x + o(x) \iff e^x - 1 = x + o(x) = x(1 + o(1)) ,$$

et, pour $x \neq 0$, on peut conclure de façon analogue à l'exercice 1 que $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{x(1 + o(1))}{x} = 1 + o(1) \rightarrow 1$. La limite demandée existe donc bien et vaut 1.

Remarque 2

Les exercices 1 et 2 vous rappellent peut-être des souvenirs, même de terminale. Si oui, il est probable que vous ayez alors utilisé $\sin'(0) = 1 = \exp'(0)$ en faisant apparaître le *taux d'accroissement* associé à la dérivée en 0. La résolution courte et systématique des exercices précédents devraient commencer à vous convaincre de l'intérêt des développements limités.

Exercices d'application (suite)

Pour éviter toute erreur liée aux avertissements précédents sur les équivalents, une méthode sûre est de toujours calculer avec des développements limités, et, si besoin, de revenir seulement à la fin à la formulation avec les équivalents.

Exercice 3

Trouver un équivalent quand $x \rightarrow 0$ de

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} - \sin(x).$$

En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

Solution de l'exercice 3 :

par la proposition 5, on a quand $x \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3).$$

Solution de l'exercice 3 (suite)

De même, on a quand $u \rightarrow 0$ que $1/(1-u) = 1 + u + u^2 + o(u^2)$; posant $u = x^2$ qui tend bien vers 0 quand $x \rightarrow 0$, on en déduit en remplaçant u par sa valeur x^2

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4) = 1 + x^2 + x^3 \underbrace{(x + o(x))}_{\rightarrow 0 \iff = o(1)} = 1 + x^2 + o(x^3).$$

Toujours par la proposition 5, on a enfin $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Au bilan, on peut écrire (toujours quand $x \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} - \sin x \\ &= (1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) - (1 + x^2 + o(x^3)) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \\ &= \frac{7}{6}x^3 + o(x^3) = \frac{7}{6}x^3(1 + o(1)) \sim \frac{7}{6}x^3, \end{aligned}$$

revenant simplement à la définition d'un équivalent à la toute fin. Du coup, on a bien $f(x)/x^2 = \frac{7}{6}x \times (1 + o(1)) \rightarrow 0$, quand $x \rightarrow 0, x \neq 0$.

L'une des difficultés lors de ces calculs est que la proposition 5 ne considère que des développements en 0. En fait, même si x tend vers une valeur finie autre que 0 ou même vers $\pm\infty$, on peut très souvent d'y ramener, comme on l'illustre dans les exercices suivants.

Exercice 4

Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$.

Solution de l'exercice 4 :

on constate déjà qu'il s'agit bien d'une forme indéterminée (sinon, on n'a pas besoin d'aller chercher les développements limités et on peut se contenter d'utiliser les propriétés usuelles des limites). On procède ensuite par "étages". Quand $x \rightarrow +\infty$ comme ici, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ et il est donc opportun pour se ramener à la proposition 5 de poser $u = \frac{1}{x} \rightarrow 0$.

Exercices d'application (suite)

Solution de l'exercice 4 (suite)

On a $x = 1/u$ d'où on a quand $x \rightarrow +\infty$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1+u)^{\frac{1}{u}} = \exp\left(\frac{1}{u} \ln(1+u)\right)$$

avec $u \rightarrow 0^+$. Grâce à cette dernière propriété cruciale $u \rightarrow 0^+$, on peut à nouveau appliquer la proposition 5 et écrire successivement :

$$\ln(1+u) = u + o(u),$$

$$\frac{1}{u} \ln(1+u) = \frac{u(1+o(1))}{u} = 1 + o(1),$$

$$\exp\left(\frac{1}{u} \ln(1+u)\right) = \exp(1+o(1)) \rightarrow e^1 = e.$$

D'où, la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ existe et vaut e .

Exercice 5

Étudier la limite $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} + \frac{\sin(x-1)}{4} \right)$.

Solution de l'exercice 5 :

comme dans l'exercice précédent, on veut se ramener à une quantité qui tend vers 0 pour pouvoir appliquer la proposition 5, même si x ne tend pas lui-même vers 0. On pose alors $x = 1 + u \iff u = x - 1$ et on a bien que $u \rightarrow 0^+$ quand $x \rightarrow 1^+$ (NB : ce dernier est imposé par l'énoncé). On réécrit donc

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} + \frac{\sin(x-1)}{4} = \frac{1}{2+u} - \frac{1}{2} + \frac{\sin u}{4},$$

puis on écrit grâce à la proposition 5, maintenant légitime car $u \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{2+u} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{u}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} + o(u^2) \right) = \frac{1}{2} - \frac{u}{4} + \frac{u^2}{8} + o(u^2),$$

Exercices d'application (suite)

Solution de l'exercice 5 (suite) :

en utilisant la formule pour $\frac{1}{1+v}$ avec $v = \frac{u}{2} \rightarrow 0$. On a aussi $\sin u = u + o(u^2)$. On a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+u} - \frac{1}{2} + \frac{\sin u}{4} &= \frac{1}{2} - \frac{u}{4} + \frac{u^2}{8} + o(u^2) - \frac{1}{2} + \frac{u}{4} + o(u^2) \\ &= \frac{u^2}{8}(1 + o(1)) \left(\sim \frac{u^2}{8}\right),\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)^2} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} + \frac{\sin(x-1)}{4} \right) &= \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{2+u} - \frac{1}{2} + \frac{\sin u}{4} \right) \\ &= \frac{1 + o(1)}{8} \rightarrow \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

D'où la limite considérée existe bien et vaut $\frac{1}{8}$.

Exercices d'application (suite)

On pourra aussi utiliser ces calculs pour décider de la convergence d'une série numérique (CF TMB), comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice 6

Montrer que la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente avec u_n donné par

$$u_n = \sqrt{\frac{n^2 + n + 1}{n}} - \sqrt{n + 1}.$$

Indication : il suffira pour cela de montrer que $u_n = O(1/n^{3/2})$ quand $n \rightarrow +\infty$.^a

-
- a. Comme déjà vu, la propriété à montrer dit en particulier qu'il existe $C > 0$ tel que $|u_n| \leq C/n^{3/2}$ pour tout n ; cela donne bien la convergence de $\sum |u_n|$ en utilisant que $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente et la proposition p.1 du cours en ligne de Math 3 sur les séries numériques.

Solution de l'exercice 6 :

comme toujours, on veut se ramener à la proposition 5 et pour cela faire apparaître une quantité pertinente qui tende vers 0 (dépendant de n auquel l'énoncé impose de tendre vers $+\infty$). En particulier, la dernière formule de cette proposition avec $\alpha = \frac{1}{2}$ donne quand $y \rightarrow 0$

$$\sqrt{1+y} = (1+y)^{1/2} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \underbrace{o(y^2)}_{=o(1) \times y^2},$$

(il est recommandé de bien connaître ce cas particulier de la racine). On écrit maintenant

$$u_n = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{n+1}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right),$$

d'où, posant d'abord $y = \frac{1}{n}$ qui tend bien vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, on a

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

Solution de l'exercice 6 (suite) :

puis en posant $y = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ qui tend bien aussi vers 0, on a

$$\sqrt{1 + \frac{n+1}{n^2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{n+1}{n^2}\right) - \frac{1}{8} \times \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + o(1) \times \left(\left(\frac{n+1}{n^2}\right)^2\right),$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) - \frac{1}{8n^2} \underbrace{\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}_{=o(1)} + \underbrace{o(1) \times \frac{1}{n^2} \times (1 + o(1))}_{=o(1/n^2)},$$

$$= 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit donc

$$u_n = \sqrt{n} \left(\left(1 + \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1 + \cancel{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \right)$$

Exercices d'application (suite)

Solution de l'exercice 6 (suite) :

$$= \sqrt{n} \left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{2n^{3/2}} \underbrace{(1 + o(1))}_{=O(1) \text{ par exemple 1}} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Dans la suite du cours sur l'intégrale généralisée, on aura besoin d'étudier assez finement le comportement de fonctions qui tendent vers $\pm\infty$ en un point $a \in \mathbb{R}$ ($a = \frac{\pi}{2}$ dans l'exercice ci-dessous). Les outils de ce chapitre s'avèreront alors très utiles.

Exercice 7 (Autour du comportement de \tan en $a = \frac{\pi}{2}$)

- ① Donner la limite, puis un équivalent de $\tan x$ quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$.
- ② Étudier la limite $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}, x \neq \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)} \left(\tan x + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right)$

Exercices d'application (suite)

Solution de l'exercice 7 :

(1) On a $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pour $x \in \mathbb{R}$, $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Toujours en vue de faire apparaître une quantité qui tende vers 0 quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ pour appliquer la proposition 5, on pose $x = \frac{\pi}{2} + u$, de sorte que $u \rightarrow 0$. On écrit alors (quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2} \iff u \rightarrow 0$) :

$$\sin x = 1 + o(1) \text{ et } \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = -\sin u = -u + o(u),$$

soit

$$\tan x = \frac{1 + o(1)}{-u(1 + o(1))} = -\frac{1}{u}(1 + o(1)) \sim -\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}},$$

en particulier, $\tan x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$.

(2) On vérifie avant de se lancer dans les calculs qu'on a bien à faire à une forme indéterminée (on soustrait exactement à la tan l'équivalent de la question précédente...). On va donc raffiner le calcul précédent en écrivant quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ ($\iff u \rightarrow 0, u \neq 0$) :

Exercices d'application (suite)

Solution de l'exercice 7 (suite) :

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = \cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \text{ et}$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = -\sin u = -u + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3),$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)}{-u + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3)} \\ &= -\frac{1}{u} \left(1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right) \times \frac{1}{1 - \frac{1}{6}u^2 + o(u^2)}, \end{aligned}$$

avec (posant $v = \frac{1}{6}u^2 + o(u^2) \rightarrow 0$)

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{6}u^2 + o(u^2)} = \frac{1}{1 - v} = 1 + v + o(v) = 1 + \frac{1}{6}u^2 + o(u^2),$$

soit au bilan $\tan x = -\frac{1}{u} \left(1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right) \times \left(1 + \frac{1}{6}u^2 + o(u^2)\right),$

Exercices d'application (suite)

Solution de l'exercice 7 (suite) :

$$= -\frac{1}{u} \left(1 + u^2 \left(\underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}_{=-\frac{1}{3}} \right) + o(u^2) \times O(1) - \underbrace{\frac{u^4}{12}}_{=o(u^2)} \right) = -\frac{1}{u} + \frac{u}{3} + o(u^1)$$

car $\frac{1}{u} \times o(u^2) = \frac{1}{u} \times o(1) \times u^2 = o(u)$. Pour conclure, on écrit

$$\tan x + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{u} + \frac{u}{3} + o(u) + \frac{1}{u} = u \left(\frac{1}{3} + o(1) \right),$$

et comme on a vu ci-dessus $\cos x = -u + o(u) = u(-1 + o(1))$, on a

$$\frac{1}{\cos x} \left(\tan x + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right) = \frac{u \left(\frac{1}{3} + o(1) \right)}{u(-1 + o(1))} \rightarrow -\frac{1}{3}.$$

Pour conclure, la limite existe et vaut $-\frac{1}{3}$.

Merci de votre attention !