

Contrôle final Mathématiques 4.
2025-2026.
Durée totale : 2h

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Leur présence en dehors des sacs constitue une présomption de fraude.

Les exercices sont indépendants. Le barème est à titre indicatif.

Il y a quatre copies à rendre, une par exercice ! Chaque exercice est corrigé séparément par un correcteur.

Exercice 1 (4 points)

Dites si les affirmations suivantes sont vraies. **Justifier.**

1. La **suite** $u_n = \frac{1}{\ln(n)}$, $n \geq 2$ converge.
2. La **suite de fonctions** $v_n(x) = \frac{x}{\ln(n)}$, $n \geq 2$ converge uniformément pour $x \in [1, 2]$.
3. La **suite de fonctions** $w_n(x) = \frac{x}{\ln(n)}$, $n \geq 2$ converge uniformément pour $x \in [1, +\infty[$.
4. La **série** de terme général $a_n = \frac{1}{\ln(n)}$, $n \geq 2$ converge.

Exercice 2 (6 points)

1. Soit f la fonction 2π -périodique **paire** définie par : $f(x) = x \cos(x)$, $x \in [0, \pi]$. Dessiner son graphe sur $[-3\pi, 3\pi]$ et calculer ses coefficients **réels** de Fourier.
 Dans quels points est-ce que la somme de la série de Fourier notée Sf vérifie $Sf(x) = f(x)$?
2. Soit g la fonction 2π -périodique **paire** définie par : $g(x) = e^{-x}$, $x \in [0, \pi]$. Dessiner son graphe sur $[-3\pi, 3\pi]$ et calculer ses coefficients **réels** de Fourier.
 Dans quels points est-ce que la somme de la série de Fourier notée Sg vérifie $Sg(x) = g(x)$?

Exercice 3 (5 points)

Est-ce que les intégrales suivantes sont convergentes ?

1.
$$\int_0^1 f(x) dx, f(x) = \frac{1}{x^3 \exp(x)}.$$
2.
$$\int_0^1 g(x) dx, g(x) = \frac{-1}{x^2 \ln(x)}.$$

Exercice 4 (5 points)

Trouver la fonction **de la variable t (ne pas oublier de préciser pour quelles valeurs de t sont définies f et g !)** dont la transformée de Laplace est :

1. $L[f](s) = s/(1 + s + s^2)$.
2. $L[g](s) = s/(1 - s^3)$.

Le formulaire se trouve sur la page suivante.

Les coefficients **réels** de Fourier de f T -périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période (a au choix, $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} \cos(n\omega x) f(x) dx, \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} \sin(n\omega x) f(x) dx.$$

La transformée de Laplace de $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ est donnée par $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$. On pourra aussi utiliser librement l'identité $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$.

Transformées de Laplace usuelles

(3)	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
(4)	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ pour $s > a$
(5)	$e^{at} \cos(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2 + \omega^2}$ pour $s > a$
(6)	$e^{at} \sin(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$ pour $s > a$
(7)	$e^{at}h(t), a > 0$	$\mathcal{L}[h](s-a)$

Décomposition en éléments simples complexe de $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$, avec $q(s) = a(s-s_1)^{m_1} \dots (s-s_k)^{m_k}$ et $\deg(p) < \deg(q)$ est de la forme :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j},$$

avec pour $1 \leq j \leq m_i$:

$$a_{i,j} = \frac{1}{(m_i - j)!} \left[\frac{d^{(m_i-j)}}{ds^{(m_i-j)}} (Y(s)(s-s_i)^{m_i}) \right]_{s=s_i}.$$

Dans ce cas, $a_{i,1}$ est le résidu de Y en s_i .

Décomposition réelle. Si $q(s) = a(s-s_1)^{m_1} \dots (s-s_l)^{m_l} ((s-a_1)^2 + b_1^2)^{n_1} \dots ((s-a_\lambda)^2 + b_\lambda^2)^{n_\lambda}$, pour s_i, a_i, b_i réels, et Y comme ci-dessus, il existe des réels $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ uniques tels que

$$Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j} + \sum_{i=1}^\lambda \sum_{j=1}^{n_i} \frac{c_{i,j} + sd_{i,j}}{((s-a_i)^2 + b_i^2)^j}.$$