Fiche 4

Intégrales à paramètre

Exercice 1. Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout $x > 0$, $F(x)$ peut s'écrire comme une intégrale dont les bornes ne dépendent pas de x.
2. Montrer que F est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \longmapsto e^{-t^2+2at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = 2xF(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. En déduire une expression explicite de F sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Exercice 3. Soit $a > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx}\mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a $F'(x) = \dfrac{-x}{2a}F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que $F(x) = F(0)\mathrm{e}^{-x^2/4a}$ pour tout x réel puis que $F(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-x^2/4a}$.

On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Exercice 4.

1. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leq |u|$.
2. Pour $x \geq 0$, on pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
   (a) Montrer que la fonction F est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et expliciter $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
   (b) En déduire une expression explicite de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 5. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,t^x\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction F est égal à $]-1; +\infty[$.
2. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1; +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x > -1$.
3. Montrer que F admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et la déterminer. En déduire une expression explicite de F.

Exercice 6. (**La fonction Γ d'Euler**) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Quel est le domaine de définition de Γ ?
2. Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que Γ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, et calculer $\Gamma^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que Γ est strictement convexe.
5. a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   b) En déduire $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et un équivalent de Γ en 0.
   c) En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \Gamma(x)$.

Exercice 7. Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie, continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.

2. Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.

3. $(*)$ Démontrer les équivalents suivants :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

Indication : pour l'équivalent lorsque $x \to 0^+$, on pourra (démontrer et) utiliser l'encadrement : pour tout $t \in [0; \pi/2]$, $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1$.

Exercice 8. Pour $x \in [-1; 1]$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(t+2)^{x-1}}{(t+1)^{x+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $[-1; 1]$.
2. En déduire la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_1^{+\infty} \frac{(t+2)^{x-1}}{(t+1)^{x+1}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9. Pour $x \in [0; +\infty[$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^x \cos t\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer qu'il existe $c \in [0; +\infty[$ tel que $f(c) = \frac{3}{4}$.