
Fiche 3
SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 1 (Rayon de convergence) Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes ($z \in \mathbb{C}$) :

- | | |
|--|---|
| 1. $\sum_n (-1)^n (n+3)! z^n,$ | 5. $\sum_n (1 + 1/n)^{(n^2)} z^n,$ |
| 2. $\sum_n n^n z^n,$ | 6. $\sum_n \frac{(1-i)^n}{n 2^n} z^n,$ |
| 3. $\sum_n \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n,$ | 7. $\sum_n \frac{n^2}{3^n + n} z^n,$ |
| 4. $\sum_n \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n,$ | 8. $\sum_n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) z^n.$ |

Exercice 2 (Rayon de convergence) Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

- | | |
|-------------------------|-----------------------------|
| 1. $\sum_n a_n z^{3n},$ | 2. $\sum_n a_n 3^n z^{2n}.$ |
|-------------------------|-----------------------------|

Exercice 3 (Rayon de convergence) Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. $\sum_n (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1},$ | 3. $\sum_n z^{n!},$ |
| 2. $\sum_n \frac{n!}{1.3 \dots (2n+1)} z^{2n+3}.$ | 4. $\sum_n (1 + (-1)^n/n)^{(n^2)} z^n.$ |

Exercice 4 (Rayon de convergence) Déterminer le rayon de convergence, R , de $\sum_n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$, puis étudier sa convergence pour $|z| = R$.

Exercice 5 (Vrai ou faux)

1. Les séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n (-1)^n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
2. Les séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n (-1)^n a_n z^n$ ont le même domaine de convergence.

Exercice 6 (Séries entières : calcul explicite)

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum_n x^n$.

2. En utilisant l'expression des sommes partielles d'une série géométrique, montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1/(1-x).$$
3. Calculer le rayon de convergence des séries entières associées et déterminer la valeur des sommes suivantes pour x dans l'intervalle ouvert de convergence :

a. $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n,$

b. $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n,$

c. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1},$

d. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n,$

e. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)!} x^n,$

f. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} x^n$

Exercice 7 (Rayon de convergence)

- Calculer le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum_n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- Calculer les dérivées successives de $x \mapsto \text{ch}(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.
- En utilisant Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \text{ch}(x)$.
- En déduire le rayon de convergence et la somme de $\sum_n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Exercice 8 (Séries entières et équations différentielles)

Déterminer les séries entières dont la fonction somme est solution de

$$x^2 f''(x) - x(2x^2 - 1)f'(x) - (2x^2 + 1)f(x) = 0.$$

Calculer le rayon des séries entières obtenues.

Exercice 9 (Série entières et équation différentielles)

On considère l'équation différentielle

$$f''(x) - 4f(x) = 0. \quad (1)$$

On cherche f sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et vérifiant les conditions $f(0) = 4$ et $f'(0) = 0$.

Montrer que la seule solution est $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^{p+1}}{(2p)!} x^{2p}$, et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 10 (Série entières et équations différentielles)

On cherche le développement en série entière de $f(x) = (1+x)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, par la "méthode de l'équation différentielle".

- Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$\alpha f(x) - (1+x)f'(x) = 0. \quad (2)$$

(Auriez-vous pu déterminer vous-même cette équation différentielle?)

- Déterminer les solutions de (2) développables en séries entières et calculer leur rayon de convergence.
- Montrer que si g est solution de l'équation (2) sur un intervalle I contenu dans $] -1, +\infty[$ alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, g(x) = C(1+x)^\alpha$.

4. En déduire le développement en série entière de f en 0.

Exercice 11 (Développements en série entière)

Développer en série entière autour de 0 les fonctions suivantes et déterminer les rayons de convergence des séries entières obtenues :

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1. $x \mapsto \frac{1}{x-5},$ | 6. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt[5]{32-x}},$ |
| 2. $x \mapsto \frac{1}{1+9x^2},$ | 7. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ |
| 3. $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2},$ | 8. $x \mapsto \arcsin x,$ |
| 4. $x \mapsto \ln(5-x).$ | 9. $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x-1}.$ |
| 5. $x \mapsto \frac{1}{(2+x)^3},$ | |

Exercice 12 (Développements en série entière en un point différent de 0)

Développer en série entière les fonctions suivantes au point donné :

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. $x \mapsto \ln(x)$ en 1 puis en 2, | 3. $x \mapsto e^x$ en $x_0 \in \mathbb{R},$ |
| 2. $x \mapsto \sin(x)$ en $\pi/4,$ | 4. $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en 2. |

Exercice 13 (Applications des séries entières)

- Montrer que la fonction sinus cardinal définie sur $\mathbb{R}$ par $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $\text{sinc}(0) = 1$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\text{sinc}^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Établir l'égalité :

$$\int_0^\pi \text{sinc}(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

Exercice 14 (Séries de Taylor)

Donner un exemple de fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ mais dont la série de Taylor ne converge pas sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 15 (Séries de Taylor) Exemple classique (mais un peu lourd) : la série de Taylor converge, mais **pas vers la fonction !**

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n(x)$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp(-1/x^2)$.
- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
- En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.