Fiche 2
Séries de fonctions

Exercice 1 (Convergence simple, normale et uniforme)
Étudier la convergence simple, la convergence normale puis la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ dans les cas suivants :

1. $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$,
2. $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$, sur $[0,+\infty[$ puis sur $[0,a]$ avec $a>0$,
3. $f_n : x \longmapsto \dfrac{x}{n^3+x^{3/2}}$ sur $[0,+\infty[$ puis sur $[0,a]$ avec $a>0$.

Exercice 2 (Convergence simple, uniforme et normale)
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur toute partie $D\subset\mathbb{R}$ avec $D\neq\emptyset$, $D\neq\{0\}$.

Exercice 3 (Série de fonctions, intégrale, et dérivée)
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que sa somme $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est une fonction continue.
3. Montrer que $\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^4}$.
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Classe $\mathcal{C}^\infty$)
On pose, pour $x\in\mathbb{R}^+$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose (lorsque cela a un sens)

$$\varphi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) .$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction φ.
2. Justifier l'existence de l'intégrale suivante et la calculer explicitement :

$$I = \int_0^1 \varphi(x) \, \mathrm{dx}.$$

Exercice 6

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $\dfrac{1}{e^t - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \, dt$. On admettra l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = x^n(1 - \sqrt{x})$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{x}} \, dx$.
2. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

Exercice 8 Pour x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} .$$

1. Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f.
2. Étudier la continuité de f sur D_f.
3. Montrer que la fonction f est strictement décroissante.
4. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 9 On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_n f_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \frac{(-1)^n e^{-nt}}{n+1}.$$

1. (a) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_n f_n$ converge simplement sur $E_s = [0, +\infty[$.
   (b) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_n f_n$ converge absolument sur $E_a =]0, +\infty[$.
   (c) Montrer que la série $\displaystyle\sum_n f_n$ converge uniformément sur E_s.
   (d) La série converge-t-elle normalement sur E_s ? Et sur E_a ? Justifier.
2. Soit S la fonction somme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 0} f_n$. Montrer que lorsque t tend vers $+\infty$, $S(t)$ tend vers 1.

Exercices d'entraînement

Exercice 10 Montrer que les séries de fonctions suivantes ne convergent pas normalement sur l'intervalle I indiqué en montrant que $\sum ||f_n||_\infty$ diverge.

1. $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{n+x^n}$ sur $I =]1,2]$,
2. $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \dfrac{\sin nx}{n}$ sur $I = \mathbb{R}$,
3. $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto e^{-nx^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 11 Montrer que les séries de fonctions suivantes ne convergent pas normalement ni uniformément sur l'intervalle indiqué I en trouvant $(x_n)_n$ tel que $f_n(x_n)$ ne tend pas vers 0.

1. $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{xn^2}$ sur $I =]0,\infty[$,
2. $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto 2^{-n/x}$ sur $I =]0,\infty[$,
3. $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto n^2x^n$ sur $I = [0,1[$,
4. $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto e^{-nx}$ sur $I =]0,\infty[$,
5. $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \dfrac{n+x^2}{n^4+x^2}$ sur $I = [0,\infty[$.

(Indication : Si le dénominateur est la somme de deux termes positifs, l'argument x_n est souvent la valeur où les deux termes sont égaux.)

Exercice 12 Montrer que les séries de fonctions suivantes ne convergent pas normalement sur l'intervalle I indiqué en trouvant $(x_n)_n$ tel que $\sum |f_n(x_n)|$ diverge.

1. $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ sur $I =]0,\infty[$,
2. $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \dfrac{n+x^3}{n^4+x^4}$ sur $I = [0,\infty[$.

Exercice 13 Montrer que les séries de fonctions suivantes convergent normalement sur l'intervalle I indiqué en montrant que $\sum ||f_n||_\infty$ converge.

1. $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{n^2x}$ sur $I = [1,2]$,
2. $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ sur $I = [1,\infty[$,
3. $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \dfrac{n+x^2}{n^4+x^2}$ sur $I = [0,1]$.

Exercice 14 Montrer que les séries de fonctions suivantes convergent normalement sur l'intervalle I indiqué, en trouvant $(a_n)_n$ tel que $|f_n(x)| \leq a_n \ \forall x$ et $\sum a_n$ converge.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \dfrac{n+x}{n^4+x^2}$ sur $I = [0, \infty[$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto e^{-n(x^2+1)} + e^{-n((x+1)^2+1)}$ sur $I = \mathbb{R}$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n}{n^2}$ sur $I = [0, a]$, $a < 1$.

(Indication : Si le dénominateur est la somme de deux termes positifs, on trouve souvent deux majorations pour deux parties de l'intervalle en supprimant un des deux termes en faisant la différence si x est plus grand ou plus pétit que la valeur où les deux termes sont égaux.)