

---

Examen final du mardi 12 mai 2026

---

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Le barème proposé est uniquement indicatif, le total sur 25 points prend en compte la longueur du sujet.

**Exercice 1.** ( $\simeq 6$  points)

On considère l'équation différentielle

$$f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0. \quad (E)$$

On cherche les solutions de (E) qui sont somme d'une série entière et vérifient la condition

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0. \quad (CI)$$

Supposons qu'il existe une fonction  $f$ , somme d'une série entière de rayon de convergence  $R$  strictement positif avec  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , solution de (E) avec (CI) sur  $] -R, R[$ .

1. Calculer  $a_0, a_1$ .
2. Trouver une relation entre  $a_n$  et  $a_{n-2}$  pour tout  $n \geq 2$ .
3. Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^k k!}$  et  $a_{2k+1} = 0$ .
4. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue? Conclure.
5. Exprimer  $f$  à l'aide des fonctions usuelles.

**Exercice 2.** ( $\simeq 6$  points)

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{\arctan\left(\frac{x^2}{9}\right)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{9} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est développable en série entière en 0.
2. En déduire que  $f$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f^{(k)}(0)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
3. Calculer le **rayon de convergence** ainsi que le **domaine de convergence**  $\mathcal{D}$  de la série entière associée au développement de  $f$ .
4. Exprimer, en le justifiant,  $\int_0^2 f(x)dx$  comme somme d'une série numérique à expliciter.

**Exercice 3.** ( $\simeq 7$  points) Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $F(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$ .

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction  $F$  est égal à  $] -1, +\infty[$ .

2. Montrer que la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[$  et calculer  $F'(x)$  pour  $x > -1$ .

*Indication : Pour l'hypothèse de domination, vous pouvez travailler sur des intervalles de type  $]a, +\infty[$  avec  $a > -1$ .*

3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ . En déduire la valeur de  $F(x)$  pour tout  $x > -1$ .

**Exercice 4.** ( $\simeq 3$  points)

Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y \leq x\} \subset [0, 1]^2$ .

1. Dessiner  $D$ .

2. Calculer (en justifiant)  $\iint_D xy^2 dx dy$ .

**Exercice 5.** ( $\simeq 3$  points)

Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 9\}$ .

1. Dessiner  $D$ .

2. En passant en coordonnées polaires, calculer  $\iint_D (x^2 - y^2) dx dy$ .

**Correction de l'exercice 1 :**

1. Supposons qu'il existe une fonction  $f$  somme d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  solution de (E) avec (CI) sur  $] -R, R[$ . On a alors pour tout  $x \in ] -R, R[$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Comme, d'après le cours,  $a_0 = f(0)$  et  $a_1 = f'(0)$  on déduit de (CI) que  $a_0 = 1$  et  $a_1 = 0$ .

2. On a pour tout  $x \in ] -R, R[$ ,  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$  et  $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ .

En remplaçant dans (E), on obtient pour tout  $x \in ] -R, R[$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0,$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Par suite,  $\forall x \in ] -R, R[$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n] x^n = 0.$$

Par unicité du DSE, on a alors pour tout  $n \geq 0$ ,  $(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n = 0$  c'est-à-dire pour tout  $n \geq 0$ ,  $a_{n+2} = -\frac{1}{n+2} a_n$  ce qui n'est autre que

$$\forall n \geq 2, a_n = -\frac{1}{n} a_{n-2}.$$

3. Calculons  $a_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

D'après 2, on a

$$\forall n \geq 2, a_n = -\frac{1}{n} a_{n-2} \tag{1}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Deux cas :

- i) si  $n = 2k + 1$  impair, on a d'après (1), pour tout  $n \geq 3$ , donc pour tout  $k \geq 1$ ,  $a_{2k+1} = -\frac{1}{2k+1} a_{2k-1}$ .  
Comme  $a_1 = 0$ , on déduit alors (par récurrence simple) que

$$\forall k \geq 0, a_{2k+1} = 0.$$

- ii) si  $n = 2k$  pair, on a d'après (1), pour tout  $n \geq 2$ , donc pour tout  $k \geq 1$ ,  $a_{2k} = -\frac{1}{2k} a_{2k-2}$ . On a alors

$$\begin{aligned} a_{2k} &= -\frac{1}{2k} a_{2k-2} \\ a_{2k-2} &= -\frac{1}{2k-2} a_{2k-4} \\ &\vdots \\ a_4 &= -\frac{1}{4} a_2. \\ a_2 &= -\frac{1}{2} a_0. \end{aligned}$$

En multipliant ces  $k$  égalités, on obtient pour tout  $k \geq 1$ ,

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2 \times 4 \times \dots \times 2k} a_0 = \frac{(-1)^k}{2^k k!}$$

(comme  $a_0 = 1$  d'après 1).

Cette égalité reste vraie pour  $k = 0$  et on a donc

$$\forall k \geq 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^k k!}$$

Par suite,

$$\forall x \in ]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} x^{2k}.$$

En remontant les calculs, on vérifie que  $f$  est solution de (E) avec (CI) sur  $]-R, R[$  à condition que  $R > 0$ .

4. Calculons le rayon de convergence  $R$  de  $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2^k k!} x^{2k} = \sum_{k \geq 0} c_k x^{2k}$  (avec  $c_k = a_{2k}$  pour tout  $k \geq 0$ ).

**1ère méthode :** Soit  $R_1$  est le rayon de convergence de  $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2^k k!} x^k = \sum_{k \geq 0} c_k x^k$ .

Calculons  $R_1$ .

Règle de D'Alembert : on a  $c_k \neq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \frac{2^k}{2^{k+1}} \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{2(k+1)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} l_1 = 0.$$

Par suite  $R_1 = +\infty$  et donc  $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$  converge absolument pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

En posant  $U = x^2$ , on déduit alors que  $\sum_{k \geq 0} c_k U^k = \sum_{k \geq 0} c_k x^{2k}$  converge absolument pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

D'où  $R = +\infty$  (d'après la caractérisation du rayon de convergence).

**2ème méthode pour  $R$  :** On va appliquer la règle de D'Alembert pour les séries numériques pour calculer  $R$  directement.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Notons que pour  $x = 0$ , la série numérique  $\sum_{k \geq 0} c_k x^{2k} = \sum_{k \geq 0} c_k 0^{2k} = c_0 = a_0 = 1$  converge absolument (toute série entière converge absolument en  $x = 0$ ).

Et pour  $x \neq 0$ , comme  $\forall k \geq 0, c_k x^{2k} \neq 0$ , on peut alors appliquer la règle de D'Alembert pour les séries numériques à  $\sum_{k \geq 0} c_k x^{2k}$ . On a

$$\forall k \geq 0, \quad \frac{|c_{k+1} x^{2k+2}|}{|c_k x^{2k}|} = \frac{2^k}{2^{k+1}} \frac{k!}{(k+1)!} |x|^2 = \frac{1}{2(k+1)} |x|^2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} l = 0 < 1.$$

Comme  $l = 0 < 1$ , on déduit de la règle de D'Alembert que  $\sum_{k \geq 0} c_k x^{2k}$  converge absolument pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  et par suite pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Par suite, d'après la caractérisation du rayon de convergence,  $R = +\infty$ .

**Conclusion :** Comme  $R = +\infty > 0$ , on déduit que la fonction  $f$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} x^{2k}$  est l'unique solution de (E) +(CI) sur  $]-R, R[ = \mathbb{R}$  sous forme de fonction somme d'une série entière.

**Remarque :** C'est même l'unique solution de (E) +(CI) d'après Cauchy-Lipschitz linéaire.

5. On va exprimer maintenant  $f$  à l'aide des fonctions usuelles.

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ( $R = +\infty$ ),

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!} \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

**Correction de l'exercice 2 :**

1. D'après le DSE de arctan en 0 ( $\forall u \in \mathbb{R}$  tel que  $|u| < 1$ ,  $\arctan u = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1}$ ), on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \left| \frac{x^2}{9} \right| = \frac{|x|^2}{9} < 1 \text{ i.e. } \forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |x| < 3, \arctan\left(\frac{x^2}{9}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{9^{2n+1}(2n+1)}. \quad (2)$$

Par suite, d'après (2),

$$\forall x \in ]-3, 3[ \setminus \{0\}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{9^{2n+1}(2n+1)} := S(x)$$

où  $S$  est la fonction somme de la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{9^{2n+1}(2n+1)} x^{4n} = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$  de rayon de convergence  $R$  avec

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{9^{2n+1}(2n+1)} & \text{si } k = 4n, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k}{4}}}{9^{\frac{k}{2}+1}\left(\frac{k}{2}+1\right)} & \text{si } k \text{ est un multiple de } 4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a de plus,  $S(0) = a_0 = \frac{1}{9} = f(0)$ .

Par suite,  $f = S$  sur  $] -3, 3[ = ] -r, r[$ , donc  $f$  est DSE en 0 et on a  $R \geq r = 3$ .

2. a) Notons que  $f$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  (ouvert) car arctan et  $x \mapsto x^2$  sont  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et  $u \rightarrow \frac{1}{u}$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

Et comme  $f$  est développable en série entière en 0 d'après 1., alors  $f$  est  $C^\infty$  au voisinage de 0.

En effet, comme  $S$  est  $C^\infty$  sur  $] -R, R[$  (propriété de la fonction somme d'une série entière) et que  $f = S$  sur  $] -3, 3[ = ] -r, r[ \subset ] -R, R[$ , on déduit alors que  $f$  est  $C^\infty$  sur  $] -3, 3[$  et donc au voisinage de 0.

Par suite,  $f$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Comme  $f = S$  sur  $] -3, 3[$ , on a alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(k)} = S^{(k)}$  sur  $] -3, 3[$  et donc en particulier pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$f^{(k)}(0) = S^{(k)}(0) = k! a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k}{4}} k!}{9 \times 3^k \left(\frac{k}{2} + 1\right)} & \text{si } k \text{ est un multiple de } 4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. a) Calculons  $R$  le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{9^{2n+1}(2n+1)} x^{4n}$ .

**1ère méthode :**

On a  $R \geq r = 3$  d'après 1.

D'autre part,  $\forall x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| > 3$ ,  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{9^{2n+1}(2n+1)} x^{4n}$  diverge grossièrement car

$$\left| \frac{(-1)^n}{9^{2n+1}(2n+1)} x^{4n} \right| = \frac{\left(\frac{|x|}{3}\right)^{4n}}{9(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

par croissance comparée car  $\frac{|x|}{3} > 1$ .

On déduit alors que  $R \leq 3$  et par suite  $R = 3 = r$ .

**2ème méthode :** Notons  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{9^{2n+1}(2n+1)} x^{4n} = \sum_{n \geq 0} b_n x^{4n}$  et notons  $R_1$  le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ .

Commençons par calculer  $R_1$ .

Règle de D'Alembert : on a  $b_n \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et

$$\forall n \geq 0, \quad \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{9^{2n+1}}{9^{2n+3}} \times \frac{2n+1}{2n+3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{9^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1 = \frac{1}{81}.$$

D'où

$$R_1 = \frac{1}{l_1} = 81. \quad (3)$$

Posons maintenant  $U = x^4$ .

Comme  $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$  converge absolument pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| < R_1$  et diverge grossièrement pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| > R_1$ , on a alors

$\sum_{n \geq 0} b_n x^{4n} = \sum_{n \geq 0} b_n U^n$  converge absolument pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|U| = |x^4| = |x|^4 < R_1$  et diverge grossièrement pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x|^4 > R_1$ .

D'où  $\sum_{n \geq 0} b_n x^{4n}$  converge absolument pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| < \sqrt[4]{R_1}$  (donc  $R \geq \sqrt[4]{R_1}$ ) et diverge grossièrement pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| > \sqrt[4]{R_1}$  (donc  $R \leq \sqrt[4]{R_1}$ ).

D'où  $R = \sqrt[4]{R_1} = 3$  d'après (3).

**3ème méthode :** D'Alembert pour les séries numériques (à faire).

b) On sait que  $] -R, R[ = ] -3, 3[ \subset \mathcal{D} \subset [-R, R] = [-3, 3]$ .

Reste à étudier la convergence de la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{9^{2n+1}(2n+1)} x_i^{4n}$ , pour  $i = 0, 1$  avec  $x_0 = -3$ ,  $x_1 = 3$ . Or

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{9^{2n+1}(2n+1)} x_0^{4n} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{9^{2n+1}(2n+1)} x_1^{4n} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{9(2n+1)} := \sum_{n \geq 0} u_n$$

est une série alternée car pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(-1)^n u_n = \frac{1}{9(2n+1)} \geq 0$  avec  $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{9(2n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1}| = \frac{1}{9(2n+3)} < \frac{1}{9(2n+1)} = |u_n|$ ).

Par suite, d'après le CSSA,  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge. On en conclut que

$$\mathcal{D} = [-3, 3].$$

4. Comme  $f = S$  sur  $[0, 2[ \subset ]-3, 3[ \subset ]-R, R[$  (ici  $] -3, 3[ = ] -R, R[$ ), on peut alors, d'après le cours, intervertir intégrale et somme et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 S(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{9^{2n+1}(2n+1)} \int_0^2 x^{4n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{9^{2n+1}(2n+1)} \left[ \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right]_{x=0}^{x=2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n 16^n}{9^{2n+1}(2n+1)(4n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{9(2n+1)(4n+1)} \left( -\frac{16}{81} \right)^n \end{aligned}$$

### Questions supplémentaires :

4. Montrer que  $S$  est continue sur  $\mathcal{D} = [-3, 3]$ .

**Remarque :** D'après le cours,  $S$  est continue sur  $] -R, R[ = ] -3, 3[$ . Reste à étudier la continuité de  $S$  en  $-3$  et  $3$ . Pour cela, on va montrer directement que  $S$  est continue sur tout  $[-3, 3]$  en utilisant le théorème de continuité de la fonction somme d'une série de fonctions.

Considérons pour tout  $n \geq 0$ ,  $f_n : x \rightarrow \frac{(-1)^n}{9^{2n+1}(2n+1)} x^{4n}$ .

**Remarque :** Notons que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  ne converge pas normalement sur  $[-3, 3]$  car pour tout  $n \geq 0$ ,

$$0 \leq \|f_n\|_{\infty, [-3, 3]} = \frac{1}{9(2n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{18n} \text{ et la série de Riemann } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

On va utiliser le critère de convergence uniforme des séries alternées et montrer que  $\sum_{n \geq 0} f_n$  CVU sur  $[-3, 3]$ .

Pour tout  $x \in [-3, 3]$ ,  $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$  est une série alternée car pour tout  $n \geq 0$ ,  $(-1)^n f_n(x) = \frac{x^{4n}}{9^{2n+1}(2n+1)} \geq 0$  (garde un signe constant), avec

$$\forall n \geq 0, \quad 0 \leq |f_n(x)| = \frac{|x|^{4n}}{9^{2n+1}(2n+1)} = \left( \frac{|x|}{3} \right)^{4n} \frac{1}{9(2n+1)} \leq \frac{1}{9(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

où on a utilisé le fait que  $\frac{|x|}{3} \leq 1$ .

Par suite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = 0$ .

D'autre part, montrons que  $(|f_n(x)|)_{n \geq 0}$  est décroissante. On a

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \quad |f_{n+1}(x)| &= \frac{1}{9^{2n+3}(2n+3)} |x|^{4(n+1)} \\ &= \frac{1}{9} \frac{1}{2n+3} \left( \frac{|x|}{3} \right)^{4n+4} \\ &\leq \frac{1}{9} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{|x|}{3} \right)^{4n} \\ &= |f_n(x)| \end{aligned}$$

car  $0 \leq \frac{|x|}{3} \leq 1$  (comme  $x \in [-3, 3]$ ) et donc  $\left(\frac{|x|}{3}\right)^{4n+4} \leq \left(\frac{|x|}{3}\right)^{4n}$  car  $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante pour  $0 \leq u \leq 1$ .

Par suite, pour tout  $n \geq 0$ ,  $|f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x)|$ .

D'où  $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

On a donc montré que pour tout  $x \in [-3, 3]$ , la série numérique  $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$  vérifie le CSSA et par suite converge

i.e.  $\sum_{n \geq 0} f_n$  CVS sur  $[-3, 3]$  (on le savait déjà d'après 3. b)) et de plus pour tout  $x \in [-3, 3]$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$  et donc

$$\forall n \geq 0, \sup_{x \in [-3, 3]} |R_n(x)| \leq \sup_{x \in [-3, 3]} |f_{n+1}(x)|. \quad (4)$$

Comme  $\sum_{n \geq 0} f_n$  CVS sur  $[-3, 3]$ , montrer que  $\sum_{n \geq 0} f_n$  CVU sur  $[-3, 3]$  revient à montrer que la suite de fonctions reste  $(R_n)_n$  CVU vers la fonction nulle sur  $[-3, 3]$ . Et donc d'après (4), il suffit de montrer que  $(f_n)_n$  CVU vers la fonction nulle sur  $[-3, 3]$ .

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \sup_{x \in [-3, 3]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [-3, 3]} \frac{1}{9^{2n+1}(2n+1)} |x|^{4n} = \frac{1}{9(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

où on a utilisé le fait que  $u \mapsto u^{4n}$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ , donc  $\forall x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| \leq 3$ ,  $|x|^{4n} \leq 3^{4n} = 9^{2n}$ .

D'où  $(f_n)_n$  CVU vers la fonction nulle sur  $[-3, 3]$  et donc, d'après (4),  $(R_n)_n$  CVU vers la fonction nulle sur  $[-3, 3]$ .

Par suite  $\sum_{n \geq 0} f_n$  CVU sur  $[-3, 3]$ .

On a alors

i) pour tout  $n \geq 0$ ,  $f_n$  continue sur  $[-3, 3]$  (car polynomiale),

ii) la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  CVU sur  $[-3, 3]$ .

Par suite, d'après le théorème de continuité de la fonction somme d'une série de fonctions,  $S$  est continue sur  $[-3, 3]$ .

5. En déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

On a

$$\begin{aligned} S_1 &:= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 9S(3) \\ &= 9 \lim_{x \rightarrow 3^-} S(x) \\ &= 9 \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \\ &= 9 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arctan\left(\frac{x^2}{9}\right)}{x^2} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

où on a utilisé dans la 2ème égalité le fait que  $S$  est continue en 3, dans la 3ème égalité le fait que  $S = f$  sur  $] - 3, 3[$ .

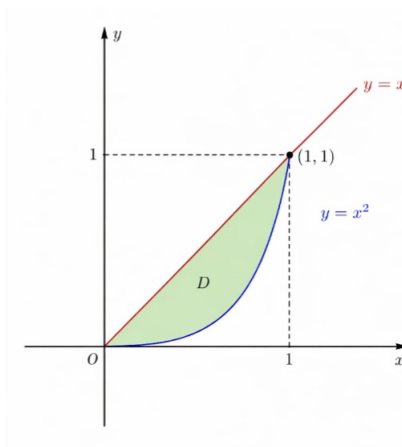
**Remarque :** On aurait pu dire ici que  $S_1 = 9S(-3) = 9 \lim_{x \rightarrow (-3)^+} S(x)$  car  $S$  continue en  $-3$  et continuer pareil.

**Correction de l'exercice 3 :**

Voir TD.

**Correction de l'exercice 4 :** Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y \leq x\}$

Calculons  $I := \iint_D xy^2 dx dy$ .



Soit

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy^2.$$

La fonction  $f$  est continue sur  $D$  car polynomiale.

D'autre part,  $D$  est une partie élémentaire de  $\mathbb{R}^2$  car

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, \varphi_1(x) = x^2 \leq y \leq x = \varphi_2(x)\} \\ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, \Psi_1(y) = y \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

avec  $\varphi_1, \varphi_2$  continues sur  $[0, 1]$  et de même  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  continues sur  $[0, 1]$ .

Par suite, d'après le Théorème de Fubini (généralisé aux parties élémentaires de  $\mathbb{R}^2$ ), on a

**1ère façon :**

En intégrant par tranches verticales,

$$I = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^x xy^2 dy \right) dx \\ = \int_0^1 x \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=x} dx \\ = \frac{1}{3} \int_0^1 x (x^3 - x^6) dx \\ = \frac{1}{3} \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8} \right]_{x=0}^{x=1} \\ = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) \\ = \frac{1}{40}.$$

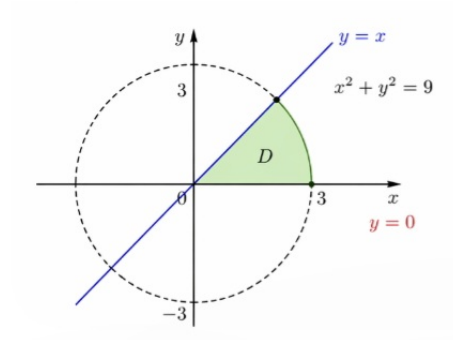
**2ème façon :**

En intégrant par tranches horizontales,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left( \int_y^{\sqrt{y}} xy^2 dx \right) dy \\
&= \int_0^1 y^2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 (y - y^2) dy \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \\
&= \frac{1}{40}.
\end{aligned}$$

**Correction de l'exercice 5 :** Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 9\}$ .

1. Dessin de  $D$ .



2. Soit

$$\begin{aligned}
f &: D \rightarrow \mathbb{R} \\
(x, y) &\mapsto x^2 - y^2
\end{aligned}$$

La fonction  $f$  est continue sur  $D$  car elle est polynomiale.

D'autre part, en utilisant les coordonnées polaires,

$$\begin{aligned}
D &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 9\} \\
&= \{(r \cos \theta, r \sin \theta); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 3\}
\end{aligned}$$

Par suite, d'après le cours, par passage en coordonnées polaires et Fubini,

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) \, dx dy &:= \iint_D (x^2 - y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^3 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) r \, dr \right) d\theta \\ &= \left( \int_0^3 r^3 \, dr \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta \right) \\ &= \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=3} \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) \, d\theta \\ &= \frac{81}{4} \left[ \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{81}{8} \left( \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 \right) \\ &= \frac{81}{8}\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta)$ .