Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2024-2025

Compléments de Mathématiques — Durée: 2 heures

Examen final du mardi 15 mai 2025

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Le barème proposé est uniquement indicatif, le total sur 26 points prend en compte la longueur du sujet.

Exercice 1. ($\simeq$ 6 **points)**

On considère l'équation différentielle

$$f''(x) - 9f(x) = 0. \tag{E}$$

On cherche les solutions de (E) qui sont somme d'une série entière et vérifient la condition

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 1. \tag{CI}$$

Supposons qu'il existe une fonction f, somme d'une série entière de rayon de convergence strictement positif avec $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, solution de (E) avec (CI).

1. Calculer a_0, a_1.
2. Trouver une relation entre a_n et a_{n-2} pour tout $n \geq 2$.
3. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = \frac{9^k}{(2k+1)!}$ et $a_{2k} = 0$.
4. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ? Conclure.
5. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 2. ($\simeq$ 7 **points)** (2,5+ 2,5+1+1)

1. Donner le développement en série entière en 0 de la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{9 + x^2}$$

ainsi que le rayon de convergence de la série entière associée.

2. En déduire, sans utiliser le développement en série entière de $u \mapsto \ln(1 + u)$ en 0, le développement en série entière en 0 de la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln(9 + x^2)$$

ainsi que **le rayon de convergence** R **et le domaine de convergence** $\mathcal{D}$ de la série entière associée.

3. En déduire

   a) $g^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n4^n}$.

Exercice 3. ($\simeq$ 7 **points)** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2+tx}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{x}{2}F(x)$.
3. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Indication : Pour l'hypothèse de domination dans 1. et 2. , travailler sur des intervalles de type $[-a, a]$ *ou* $]-a, a[$ *avec* $a > 0$ *et utiliser le fait que* $\mathrm{e}^u \leq \mathrm{e}^{|u|}$ *pour tout* $u \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. ($\simeq$ 3 **points)**
Soit $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leq 1,\ y \leq 1,\ x + y \geq 1\right\}$.

1. Dessiner T.
2. Calculer (en justifiant) $\displaystyle\iint_T xy\, dxdy$.

Exercice 5. ($\simeq$ 3 **points)**
Soit $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq x,\ y \geq -x\right\}$.

1. Dessiner D.
2. En passant en coordonnées polaires, calculer $\displaystyle\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$.

Correction de l'examen final 2024/2025

Correction de l'exercice 1 :

1. Supposons qu'il existe une fonction f somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ solution de (E) avec (CI) sur $]-R, R[$. On a alors pour tout $x \in]-R, R[$,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
Comme $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$, on déduit de (CI) que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

2. On a pour tout $x \in]-R, R[$, $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.
En remplaçant dans (E), on obtient pour tout $x \in]-R, R[$
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} 9 a_n x^n = 0,$$
Par suite, $\forall x \in]-R, R[$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \big[(n+1)(n+2)a_{n+2} - 9a_n\big] x^n = 0.$$
Par unicité du DSE, on a alors pour tout $n \geq 0$, $(n+1)(n+2)a_{n+2} - 9a_n = 0$ i.e. pour tout $n \geq 0$ $a_{n+2} = \frac{9}{(n+1)(n+2)} a_n$.
D'où pour tout $n \geq 2$, $a_n = \frac{9}{(n-1)n} a_{n-2}$.

3. D'après 2, on a
$$\forall n \geq 2,\ a_n = \frac{9}{(n-1)n} a_{n-2}. \tag{1}$$
Deux cas :

   i) Si $n = 2k$ pair, on a d'après (1), pour tout $k \geq 1$, $a_{2k} = \frac{9}{(2k-1)(2k)} a_{2k-2}$. Comme $a_0 = 0$, on déduit alors (par récurrence) que $a_{2k} = 0$ pour tout $k \geq 0$.

   ii) Si $n = 2k+1$ impair, $n \geq 3$ donc $k \geq 1$, on a d'après (1), pour tout $k \geq 1$, $a_{2k+1} = \frac{1}{2k(2k+1)} a_{2k-1}$. On a alors
$$a_{2k+1} = \frac{9}{2k(2k+1)} a_{2k-1}$$
$$a_{2k-1} = \frac{9}{(2k-2)(2k-1)} a_{2k-3}$$
$$\vdots$$
$$a_3 = \frac{9}{2 \times 3} a_1.$$
En multipliant ces k égalités, on obtient pour tout $k \geq 1$,
$$a_{2k+1} = \frac{9^k}{2 \times 3 \times ... \times 2k \times (2k+1)} a_1 = \frac{9^k}{(2k+1)!}$$
(comme $a_1 = 1$).
Cette égalité reste vraie pour $k = 0$ et on a donc
$$\forall k \geq 0, \quad a_{2k+1} = \frac{9^k}{(2k+1)!}.$$

Par suite,

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{9^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

En remontant les calculs, on vérifie que f est solution de (E) avec (CI) sur $]-R,R[$ à condition que $R>0$.

4. Calculons le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{9^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} := \sum_{k\geq 0} c_k x^{2k+1}$ avec $c_k = a_{2k+1}$ pour tout $k \geq 0$.

1ère méthode : Notons que les deux séries entières $\displaystyle\sum_{k\geq 0} c_k x^{2k+1} = x\sum_{k\geq 0} c_k x^{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 0} c_k x^{2k}$ ont le même rayon de convergence R.
Calculons tout d'abord R_1 le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{k\geq 0} c_k x^k := \sum_{k\geq 0} \frac{9^k}{(2k+1)!}x^k$.
Règle de D'Alembert : on a $c_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \frac{9^{k+1}}{9^k}\frac{(2k+1)!}{(2k+3)!} = \frac{9}{(2k+2)(2k+3)} \underset{k\to+\infty}{\to} l_1 = 0.$$

Par suite $R_1 = +\infty$ et donc $\displaystyle\sum_{k\geq 0} c_k x^k$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En posant $X = x^2$, on déduit alors que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} c_k X^k = \sum_{k\geq 0} c_k x^{2k+1}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.
D'où $R = +\infty$ (d'après la caractérisation du rayon de convergence).

2ème méthode pour R : On va appliquer la règle de D'Alembert pour les séries numériques pour calculer R directement.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Notons que pour $x=0$, la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geq 0} c_k x^{2k+1} = \sum_{k\geq 0} c_k 0^{2k+1} = 0$ converge absolument (toute série entière converge absolument en $x=0$).
Et pour $x \neq 0$, comme $\forall k \geq 0$, $c_k x^{2k+1} \neq 0$, on peut alors appliquer la règle de D'Alembert pour les séries numériques à $\displaystyle\sum_{k\geq 0} c_k x^{2k+1}$. On a

$$\forall k \geq 0, \quad \frac{|c_{k+1}x^{2k+3}|}{|c_k x^{2k+1}|} = \frac{9}{(2k+2)(2k+3)}|x|^2 \underset{k\to+\infty}{=\to} l = 0 < 1.$$

Comme $l = 0 < 1$, on déduit de la règle de D'Alembert que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} c_k x^{2k+1}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et par suite pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Par suite, d'après la caractérisation du rayon de convergence, $R = +\infty$.

Conclusion : Comme $R = +\infty > 0$, on déduit que la fonction f tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ est l'unique solution de (E) $+(CI)$ sur $]-R,R[= \mathbb{R}$ sous forme de fonction somme d'une série entière.

5. On va exprimer maintenant f à l'aide des fonctions usuelles.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(R = +\infty)$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{9^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(3x)^{2k+1} = \frac{1}{3}\,\mathrm{sh}(3x).$$

Correction de l'exercice 2 :

1. On a $D_f = \mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{9+x^2} = \frac{x}{9}\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}$.

   Par suite, comme pour tout $u \in \mathbb{R}$ tel que $|u| < 1$, on a $\frac{1}{1+u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^n$, on déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}; |\frac{x^2}{9}| < 1 \quad \text{i. e.} \quad \forall x \in \mathbb{R}; |x| < 3 = r, \quad f(x) = \frac{x}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{9^n}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{9^{n+1}}x^{2n+1},$$

   avec le rayon de convergence R de la série entière associée vérifie $R \geq r = 3$.
   Et comme pour $x_0 = 3$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{9^{n+1}}x_0^{2n+1} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3}$ diverge grossièrement (car $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\frac{(-1)^n}{3}| = \frac{1}{3} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$), on déduit que $R \leq 3$.
   D'où $R = 3$.

2. On a $D_g = \mathbb{R}$ et g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{2x}{9+x^2} = 2f(x).$$

   Par suite, d'après 1.,

$$\forall x \in \mathbb{R};\ |x| < 3, \quad g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{9^{n+1}}x^{2n+1}$$

   avec le rayon de convergence de la série entière associée $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2(-1)^n}{9^{n+1}}x^{2n+1}$ est $R = 3$ (toujours d'après 1.).
   D'après le cours, la série entière primitive de $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2(-1)^n}{9^{n+1}}x^{2n+1}$ qui n'est autre que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2(-1)^n}{9^{n+1}(2n+2)}x^{2n+2} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{9^{n+1}(n+1)}x^{2(n+1)}$, a le même rayon de convergence $R = 3$, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R};\ |x| < 3, \quad \int_0^x g'(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{9^{n+1}(n+1)}x^{2(n+1)}$$

   et donc

$$\forall x \in \mathbb{R};\ |x| < 3, \quad g(x) - g(0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n9^n}x^{2n}.$$

   D'où

$$\forall x \in \mathbb{R};\ |x| < 3, \quad g(x) = \ln(9+x^2) = \ln 9 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n9^n}x^{2n} := \sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^k \tag{2}$$

   avec le rayon de convergence de la série entière associée $\ln 9 + \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n9^n}x^{2n} := \sum_{k\geq 0}a_k x^k$ n'est autre que $R = 3$ comme mentionné ci-dessus.
   Comme $R = 3$, on a donc $]-3, 3[\subset \mathcal{D} \subset [-3, 3]$.
   Reste à étudier la convergence des deux séries numériques $\ln 9 + \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n9^n}x_i^{2n}$, $i = 0, 1$ avec $x_0 = -3$, $x_1 = -3$.
   Les deux séries numériques sont égales ici et leur étude revient à l'étude de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n} := \sum_{n\geq 1}u_n$ qui est une série alternée car pour tout $n \geq 1$, $(-1)^n u_n = \frac{-1}{n} \leq 0$ qui vérifie le CSSA (car $|u_n| = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $(|u_n|)_{n\geq 1} = (\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est décroissante) et donc converge.
   Par suite

$$\mathcal{D} = [-3, 3].$$

3. Notons S la somme de la série entière obtenue dans 2.

a) On a $g = S$ sur $]-3,3[=]-r,r[\subset]-R,R[$ (ici $]-r,r[=]-R,R[=]-3,3[$).

Comme d'après le cours, S est C^∞ sur $]-R,R[$, on a alors que g est C^∞ sur $]-3,3[$ avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)} = S^{(k)}$ sur $]-3,3[$.

En particulier, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}(0) = S^{(k)}(0) = k!a_k$.

Or

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \begin{cases} \ln 9 & \text{si } k = 0, \\ \frac{(-1)^{n-1}}{n9^n} & \text{si } k = 2n,\ n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } k = 2n+1,\ n \in \mathbb{N} \end{cases} = \begin{cases} \ln 9 & \text{si } k = 0, \\ \frac{2(-1)^{\frac{k}{2}-1}}{k3^k} & \text{si } k \text{ pair}, k \geq 2 \\ 0 & \text{si } k \text{ impair.} \end{cases}$$

D'où pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$g^{(k)}(0) = k!a_k = \begin{cases} \ln 9 & \text{si } k = 0, \\ \frac{2(-1)^{\frac{k}{2}-1}(k-1)!}{3^k} & \text{si } k \text{ pair}, k \geq 2 \\ 0 & \text{si } k \text{ impair.} \end{cases}$$

b) Comme $\frac{3}{2} \in]-3,3[$, on a d'après (2),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n4^n} = g(\frac{3}{2}) - \ln 9 = \ln(9 + (\frac{3}{2})^2) - \ln 9 = \ln(\frac{45}{4}) - \ln 9 = \ln 5 - \ln 4 = \ln(\frac{5}{4}).$$

Correction de l'exercice 3 :

1. Soit

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & e^{-t^2+tx} \end{array}$$

On a :

i) $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(.,x)\ : t \mapsto e^{-t^2+tx}$ est continue (il suffit qu'elle soit c.p.m.) car exp et $t \mapsto -t^2+tx$ sont continues sur $\mathbb{R}$

ii) $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $f(t,.) : x \mapsto e^{-t^2+tx}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car exp l'est sur $\mathbb{R}$.

iii) Soit $a > 0$.

On a $\forall x \in [-a,a]$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t,x)| = e^{-t^2}e^{tx} \leq e^{-t^2}e^{|t||x|} \leq e^{-t^2}e^{a|t|} = \varphi_a(t),$$

donc $\forall x \in [-a,a]$, $|f(.,x)| \leq \varphi_a$ sur $\mathbb{R}$ avec φ_a continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

En effet, comme φ_a est paire et continue sur $\mathbb{R}$, il suffit d'étudier son intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$.

Comme φ_a est continue, elle est intégrable sur tout segment $[0,b] \subset \mathbb{R}^+$, reste le problème au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$,

$$0 \leq \varphi_a(t) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2}). \tag{3}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} t^2\varphi_a(t) &= \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2e^{at}}{e^{t^2}} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^{\frac{t^2}{2}}}\frac{e^{at}}{e^{\frac{t^2}{2}}} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^{\frac{t^2}{2}}} \lim_{t\to+\infty} e^{at-\frac{t^2}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

par croissance comparée pour la 1ère limite et pour la 2ème limite car $at - \frac{t^2}{2} \underset{t\to+\infty}{\sim} -\frac{t^2}{2} \underset{t\to+\infty}{\to} -\infty$ et $e^u \underset{u\to-\infty}{\to} 0$.

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, intégrale de Riemann convergente au voisinage de $+\infty$ car $\alpha = 2 > 1$, on déduit de (3) que φ_a est intégrable au voisinage de $+\infty$.

D'où φ_a est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Par suite, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, F est bien définie et continue sur $[-a, a]$, $\forall a > 0$ donc sur $\mathbb{R}$.

2. On a :

   i) $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(., x)\ : t \mapsto e^{-t^2+tx}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après 1. i) et iii).

   ii) $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $f(t, .) : x \mapsto e^{-t^2+tx}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ car exp l'est sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = te^{-t^2+tx}$.

   iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(., x) : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = te^{-t^2+tx}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car exp, $t \mapsto -t^2 + tx$ et l'application identité sont continues sur $\mathbb{R}$.

   iv) Soit $a > 0$.
   On a $\forall x \in]-a, a[$,
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| = |t|e^{-t^2}e^{tx} \leq |t|e^{-t^2}e^{|t||x|} \leq |t|e^{-t^2}e^{a|t|} = \Psi_a(t),$$
   donc $\forall x \in]-a, a[$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(., x)\right| \leq \Psi_a$ sur $\mathbb{R}$ avec Ψ_a continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, même justification que pour φ_a dans 1. iii) .

Par suite, d'après le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, F est de classe C^1 sur $]-a, a[$, $\forall a > 0$ donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2+tx}\, dt.$$
Par intégration par parties en posant $u(t) = e^{tx}$, $u'(t) = xe^{tx}$ et $v'(t) = te^{-t^2}$, $v(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$, on a ,
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) &= \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2+tx}\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} + \frac{x}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+tx}\, dt \\ &= \frac{x}{2}F(x)\end{aligned}$$
car $\lim\limits_{t\to\pm\infty} -\frac{1}{2}e^{-t^2+tx} = 0$ car $-t^2 + tx \underset{t\to\pm\infty}{\sim} -t^2 \underset{t\to\pm\infty}{\to} -\infty$.

2ème façon : On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}F'(x) &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (-2t + x - x)e^{-t^2+tx}\, dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (-2t + x)e^{-t^2+tx}\, dt + \frac{x}{2}F(x) \\ &= -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2+tx}\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} + \frac{x}{2}F(x) \\ &= \frac{x}{2}F(x)\end{aligned}$$
car $\lim\limits_{t\to\pm\infty} -\frac{1}{2}e^{-t^2+tx} = 0$ car $-t^2 + tx \underset{t\to\pm\infty}{\sim} -t^2 \underset{t\to\pm\infty}{\to} -\infty$.

3. D'après 2., on a pour tout $x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{x}{2}F(x)$.

Par suite, par résolution de cette équation différentielle, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = Ce^{\frac{x^2}{4}}. \tag{4}$$

En effet

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) - \frac{x}{2}F(x) = 0 &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ e^{\frac{-x^2}{4}}\Big(F'(x) - \frac{x}{2}F(x)\Big) = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \Big(e^{\frac{-x^2}{4}}F(x)\Big)' = 0 \\
&\iff \exists C \in \mathbb{R};\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{\frac{-x^2}{4}}F(x) = C \\
&\iff \exists C \in \mathbb{R};\ \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = Ce^{\frac{x^2}{4}}.
\end{aligned}$$

Calculons C :

Comme $F(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ et que $F(0) = C$ d'après (4), on déduit alors que $C = \sqrt{\pi}$.

D'où,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sqrt{\pi}e^{\frac{x^2}{4}}.$$

Remarque (solution astucieuse ici qui n'utilise pas les théorèmes de continuité et dérivabilité des intégrales à paramètre) :

En utlisant le fait que $t^2 - tx = (t - \frac{x}{2})^2 - \frac{x^2}{4}$ et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$, on montre dès le début de l'exercice que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sqrt{\pi}e^{\frac{x^2}{4}}$.

En effet, comme pour tout $t,\ x \in \mathbb{R}$, $t^2 - tx = (t - \frac{x}{2})^2 - \frac{x^2}{4}$, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\frac{x}{2})^2}\,dt = e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}e^{\frac{x^2}{4}}$$

où on a effectué dans l'avant dernière égalité le changement de variable $u = t - \frac{x}{2}$.

Par suite, F est bien définie, continue, C^1 sur $\mathbb{R}$ car exp et $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ le sont et en dérivant on a $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{x}{2}F(x)$.

On a ainsi répondu à toutes les questions de l'exercice.

Correction de l'exercice 4 : Soit $T = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leq 1,\ y \leq 1,\ x + y \geq 1\big\}$.

1. Dessin

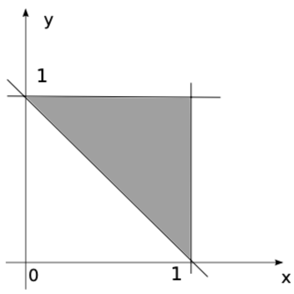

Figure 1 – Dessin T

2. Calculons $I := \iint_T xy\,dxdy$.

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} T & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy. \end{array}$$

La fonction f est continue sur T car polynomiale. D'autre part, Donc T est une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$ car

$$\begin{aligned} T &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 \leq x \leq 1,\ \varphi_1(x) = 1-x \leq y \leq 1 = \varphi_2(x)\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 \leq y \leq 1,\ \Psi_1(y) = 1-y \leq x \leq 1 = \Psi_2(y)\right\} \end{aligned}$$

avec φ_1, φ_2 continues sur $[0,1]$, Ψ_1 et Ψ_2 continues sur $[0,1]$.

Par suite, d'après le Théorème de Fubini (généralisé aux parties élémentaires de $\mathbb{R}^2$), on a

1ère façon : Intégration par tranches verticales

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 xy\,dy\right) dx \\ &= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x}^{y=1} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(1-(1-x)^2\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2x^2 - x^3\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

2ème façon : Intégration par tranches horizontales

Même calcul ici en intégrant par tranches horizontales, en échangeant les rôles de x et y.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_{1-y}^1 xy\,dx\right) dy \\ &= \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1-y}^{x=1} dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 y\left(1-(1-y)^2\right) dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 y\left(2y^2 - y^3\right) dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 : Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq x,\ y \geq -x\right\}$.

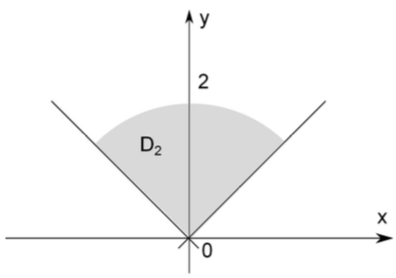

FIGURE 2 – Dessin D

1. Dessiner D.
2. En passant en coordonnées polaires, calculer $\displaystyle\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$.

   Soit

$$\begin{array}{cccc} f & : & D & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & e^{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}$$

   f est continue sur D car $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiale), exp continue sur $\mathbb{R}$ et $u\mapsto\sqrt{u}$ continue sur $\mathbb{R}^+$. D'autre part, en utilisant les coordonnées polaires

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le 4,\ y\ge x,\ y\ge -x\right\} \\ &= \{(r\cos\theta, r\sin\theta);\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4},\ 0\le r\le 2\}, \end{aligned}$$

   On a alors, d'après le cours, par changement en coordonnées polaires et Fubini,

$$\begin{aligned} \iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\int_0^2 re^r\,dr\right)d\theta \\ &= \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta\right)\left(\int_0^2 re^r\,dr\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left([re^r]_{r=0}^{r=2}-\int_0^2 e^r\,dr\right) \qquad (5) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(2e^2-[e^r]_{r=0}^{r=2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}(e^2+1) \end{aligned}$$

   où on a fait une intégration par parties dans (5).