Examen final du mardi 14 mai 2024

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Le barème proposé est uniquement indicatif, le total sur 28 *points prend en compte la longueur du sujet.*

Exercice 1. (**$\simeq$ 6 points**)

On considère l'équation différentielle

$$xf''(x) + 2f'(x) + 4xf(x) = 0. \tag{E}$$

On cherche les solutions de (E) qui sont somme d'une série entière et vérifient la condition

$$f(0) = 2. \tag{CI}$$

Supposons qu'il existe une fonction f, somme d'une série entière de rayon de convergence strictement positif avec $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, solution de (E) avec (CI).

1. Calculer a_0.
2. Trouver une relation entre a_n et a_{n-2} pour tout $n \geq 2$ ainsi que la valeur de a_1.
3. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et $a_{2k+1} = 0$.
4. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ? Conclure.
5. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 2. (**$\simeq$ 8 points**)

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccl}]-2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\ln(8+x^3) - \ln 8}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que la fonction f est développable en série entière en 0.
   On notera par la suite S la somme de la série entière trouvée.
2. En déduire que f est C^∞ sur $]-2, +\infty[$ et calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer le rayon de convergence ainsi que **le domaine de convergence** $\mathcal{D}$ de la série entière associée au développement de f.
4. Montrer que S est continue sur $\mathcal{D}$.
5. En déduire la valeur de la somme
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Exercice 3. ($\simeq 8$ **points)**

Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x > 0$, $F'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,dt$.
3. a) Calculer $F(0)$.

   b) Montrer que F admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et la déterminer.
4. Montrer que
$$\forall x > 0, \qquad F'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,du.$$
5. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} F'(x)\,dx = -2\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du\right)^2.$$
6. En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 4. **($\simeq 3$ points)** Soit $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\quad 1 \leq x \leq 3,\ y \geq 2;\ x+y \leq 5\right\}$.

Calculer (en justifiant)

$$I := \iint_T \frac{1}{(x+y)^3}\,dxdy.$$

Exercice 5. **($\simeq 3$ points)**

Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\quad \dfrac{1}{4} \leq x^2+y^2 \leq 3 \ \text{ et } \ y \geq 0\right\}$.

1. Dessiner D.
2. En passant en coordonnées polaires, calculer l'aire de D.
3. Vérifier le résultat obtenu dans 2 avec la formule d'aire d'un disque centré en $a \in \mathbb{R}^2$ de rayon $r > 0$.

Correction de l'exercice 1 :

1. Supposons qu'il existe une fonction f somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ solution de (E) avec (CI) sur $]-R, R[$. On a alors pour tout $x \in]-R, R[$,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
Comme $a_0 = f(0)$, on déduit de (CI) que $a_0 = 2$.

2. On a pour tout $x \in]-R, R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.
En remplaçant dans (E), on obtient pour tout $x \in]-R, R[$
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 4 a_n x^{n+1} = 0,$$
donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4 a_{n-1} x^n = 0.$$
Par suite, $\forall x \in]-R, R[$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n(n+1) + 2(n+1))\, a_{n+1} + 4 a_{n-1} \right] x^n + 2a_1 = 0.$$
Par unicité du DSE, on a alors (pour $n = 0$), $2a_1 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $(n+1)(n+2)a_{n+1} + 4a_{n-1} = 0$ i.e. $a_1 = 0$ et pour tout $n \geq 2$, $n(n+1)a_n = -4a_{n-2}$.

3. Calculons a_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
D'après 2, on a
$$\forall n \geq 2,\ a_n = \frac{-4}{n(n+1)} a_{n-2} \quad \text{et} \quad a_1 = 0. \tag{1}$$
Deux cas :

   i) si $n = 2k+1$ impair, on a d'après (1), pour tout $n \geq 3$, donc pour tout $k \geq 1$, $a_{2k+1} = \frac{-4}{(2k+1)(2k+2)} a_{2k-1}$.
   Comme $a_1 = 0$, on déduit alors (par récurrence) que
   $$\forall k \geq 0,\ a_{2k+1} = 0.$$

   ii) si $n = 2k$ pair, on a d'après (1), pour tout $n \geq 2$, donc $k \geq 1$, $a_{2k} = \frac{-4}{2k(2k+1)} a_{2k-2}$. On a alors
   $$a_{2k} = \frac{-4}{2k(2k+1)} a_{2k-2}$$
   $$a_{2k-2} = \frac{-4}{(2k-2)(2k-1)} a_{2k-4}$$
   $$\vdots$$
   $$a_2 = \frac{-4}{2 \times 3} a_0.$$
   En multipliant ces k égalités, on obtient pour tout $k \geq 1$,
   $$a_{2k} = \frac{(-1)^k 4^k}{2 \times 3 \times \ldots \times 2k \times (2k+1)} a_0 = \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(comme $a_0 = 2$).

Cette égalité reste vraie pour $k = 0$ et on a donc

$$\forall k \geq 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Par suite,

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k}.$$

En remontant les calculs, on vérifie que f est solution de (E) avec (CI) sur $]-R, R[$ à condition que $R > 0$.

4. Calculons le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k} = \sum_{k\geq 0} c_k x^{2k}$ (avec $c_k = a_{2k}$ pour tout $k \geq 0$).

   1ère méthode : Soit R_1 est le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} x^k = \sum_{k\geq 0} c_k x^k$.

   Calculons R_1.

   Règle de D'Alembert : on a $c_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \frac{2^{2k+3}}{2^{2k+1}} \frac{(2k+1)!}{(2k+3)!} = \frac{4}{(2k+2)(2k+3)} \underset{k\to+\infty}{\to} l_1 = 0.$$

   Par suite $R_1 = +\infty$ et donc $\displaystyle\sum_{k\geq 0} c_k x^k$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   En posant $X = x^2$, on déduit alors que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} c_k X^k = \sum_{k\geq 0} c_k x^{2k}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   D'où $R = +\infty$ (d'après la caractérisation du rayon de convergence) .

   2ème méthode pour R : On va appliquer la règle de D'Alembert pour les séries numériques pour calculer R directement.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   Notons que pour $x = 0$, la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geq 0} c_k x^{2k} = \sum_{k\geq 0} c_k 0^{2k} = c_0 = a_0 = 2$ converge absolument (toute série entière converge absolument en $x = 0$).

   Et pour $x \neq 0$, comme $\forall k \geq 0$, $c_k x^{2k} \neq 0$, on peut alors appliquer la règle de D'Alembert pour les séries numériques à $\displaystyle\sum_{k\geq 0} c_k x^{2k}$. On a

$$\forall k \geq 0, \quad \frac{|c_{k+1} x^{2k+2}|}{|c_k x^{2k}|} = \frac{2^{2k+3}}{2^{2k+1}} \frac{(2k+1)!}{(2k+3)!} |x|^2 = \frac{4|x|^2}{(2k+2)(2k+3)} \underset{k\to+\infty}{\to} l = 0 < 1.$$

   Comme $l = 0 < 1$, on déduit de la règle de D'Alembert pour les séries numériques que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} c_k x^{2k}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et par suite pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Par suite, d'après la caractérisation du rayon de convergence, $R = +\infty$.

   Conclusion : Comme $R = +\infty > 0$, on déduit que la fonction f tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k}$ est l'unique solution de (E) $+(CI)$ sur $]-R, R[= \mathbb{R}$ sous forme de fonction somme d'une série entière.

5. On va exprimer maintenant f à l'aide des fonctions usuelles.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($R = +\infty$),

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k}.$$

Donc pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (2x)^{2k+1} = \frac{\sin(2x)}{x}$$

et pour $x = 0$, $f(0) = a_0 = 2$ d'après 1.

Correction de l'exercice 2 :

1. On a

$$\forall x \in]-2, +\infty[,\ x \neq 0,\ f(x) = \frac{\ln(8 + x^3) - \ln 8}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left(\ln(8(1 + \frac{x^3}{8})) - \ln 8\right) = \frac{1}{x^3} \ln(1 + \frac{x^3}{8}). \quad (2)$$

Or, d'après le DSE de $\ln(1 + u)$ en 0, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |\frac{x^3}{8}| = \frac{|x|^3}{8} < 1 \text{ i.e. } \forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |x| < 2,\ \ln(1 + \frac{x^3}{8}) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{3n}}{n 8^n}. \quad (3)$$

Par suite, d'après (2) et (3),

$$\forall x \in]-2, 2[\setminus\{0\},\ f(x) = \frac{1}{x^3} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{3n}}{n 8^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{3n-3}}{n 8^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) 8^{n+1}} x^{3n} := S(x)$$

où S est la fonction somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1) 8^{n+1}} x^{3n} = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ de rayon de convergence R avec

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{(n+1) 8^{n+1}} & \text{si } k = 3n,\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{k}{3}}}{8(\frac{k}{3} + 1) 2^k} & \text{si } k \text{ est un mutliple de } 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a de plus, $S(0) = a_0 = \frac{1}{8} = f(0)$.

Par suite, $f = S$ sur $]-2, 2[=]-r, r[$, donc f est DSE en 0 et on a $R \geq r = 2$.

2. a) Notons que f est C^∞ sur $]-2, +\infty[\setminus\{0\}$ (ouvert) car ln est C^∞ sur $]0, +\infty[$, $x \to 8 + x^3$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $x \to \frac{1}{x^3}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

   Et comme f est développable en série entière en 0 d'après 1., alors f est C^∞ au voisinage de 0.

   En effet, comme S est C^∞ sur $]-R, R[$ (propriété de la fonction somme d'une série entière) et que $f = S$ sur $]-2, 2[=]-r, r[\subset]-R, R[$, on déduit alors que f est C^∞ sur $]-r, r[=]-2, 2[$ et donc au voisinage de 0.

   Par suite, f est C^∞ sur $[-2, +\infty[$.

   b) Comme $f = S$ sur $]-2, 2[$, on a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = S^{(k)}$ sur $]-2, 2[$ et donc en particulier pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(0) = S^{(k)}(0) = k!\, a_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{k}{3}} k!}{8(\frac{k}{3} + 1) 2^k} & \text{si } k \text{ est un mutliple de } 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. a) Calculons R le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1) 8^{n+1}} x^{3n}$.

   1ère méthode :

On a $R \geq r = 2$ et pour $x_0 = -2$, $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)8^{n+1}} x_0^{3n} = \frac{1}{8}\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{4n}}{n+1} = \frac{1}{8}\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}$ diverge car série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$.

On déduit alors que $R \leq 2$ et par suite $R = 2 = r$.

2ème méthode : Notons $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)8^{n+1}} x^{3n} = \sum_{n\geq 0} b_n x^{3n}$ et notons R_1 le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$.

Commençons par calculer R_1.

Règle de D'Alembert : on a $b_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{n+1}{n+2}\frac{8^{n+1}}{8^{n+2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{8} \underset{n\to+\infty}{\to} l_1 = \frac{1}{8}.$$

D'où

$$R_1 = \frac{1}{l_1} = 8. \tag{4}$$

Posons maintenant $U = x^3$.

Comme $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R_1$ et diverge grossièrement pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > R_1$, on a alors

$\sum_{n\geq 0} b_n x^{3n} = \sum_{n\geq 0} b_n U^n$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x^3| = |x|^3 < R_1$ et diverge grossièrement pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x|^3 > R_1$.

D'où $\sum_{n\geq 0} b_n x^{3n}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \sqrt[3]{R_1}$ (donc $R \geq \sqrt[3]{R_1}$) et diverge grossièrement pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > \sqrt[3]{R_1}$ (donc $R \leq \sqrt[3]{R_1}$).

D'où $R = \sqrt[3]{R_1} = 2$ d'après (4).

b) On sait que $]-R,R[=]-2,2[\subset \mathcal{D} \subset [-R,R] = [-2,2]$.

D'autre part, d'après 3a), 1ère méthode, on a vu que pour $x_0 = -2$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)8^{n+1}} x_0^{3n}$ diverge.

Reste à étudier pour $x_1 = 2$ la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)8^{n+1}} x_1^{3n} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{8(n+1)} = \sum_{n\geq 0} u_n$.

C'est une série alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n u_n = \frac{1}{8(n+1)} \geq 0$ avec $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{8(n+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante ($\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| = \frac{1}{8(n+2)} < \frac{1}{8(n+1)} = |u_n|$).

Par suite, d'après le CSSA, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. On en conclut que

$$\mathcal{D} =]-2,2].$$

4. Montrons que S est continue sur $\mathcal{D} =]-2,2]$.

D'après le cours, S est continue sur $]-R,R[=]-2,2[$. Reste à étudier la continuité de S en 2.

Considérons pour tout $n \geq 0$, $f_n : x \to \frac{(-1)^n}{(n+1)8^{n+1}} x^{3n}$.

Pour montrer la continuité de S en 2, on va appliquer le Théorème de continuité de la fonction somme d'une série de fonctions à $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur $I = [0,2]$.

Remarque : Notons que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ ne converge pas normalement sur $]-2,2]$ car pour tout $n \geq 0$, $\|f_n\|_{\infty,]-2,2]} = \frac{1}{8(n+1)}$ et la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

On va utiliser le critère de convergence uniforme des séries alternées et montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ CVU sur $[0,2]$ (attention pour $x<0$, la série n'est pas alternée).

Pour tout $x \in [0,2]$, $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est une série alternée car pour tout $n \geq 0$, $(-1)^n f_n(x) = \frac{x^{3n}}{(n+1)8^{n+1}} \geq 0$ (garde un signe constant), avec

$$\forall n \geq 0, \quad 0 \leq |f_n(x)| = \frac{x^{3n}}{(n+1)8^{n+1}} = \left(\frac{x}{2}\right)^{3n} \frac{1}{8(n+1)} \leq \frac{1}{8(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

où on a utilisé le fait que $\frac{x}{2} \leq 1$.

Par suite, $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x)| = 0$.

D'autre part, montrons que $(|f_n(x)|)_{n\geq 0}$ est décroissante. On a

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1, \quad |f_{n+1}(x)| &= \frac{1}{(n+2)8^{n+2}} x^{3(n+1)} \\ &= \frac{1}{8}\frac{1}{n+2}\left(\frac{x}{2}\right)^{3(n+1)} \\ &\leq \frac{1}{8}\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n} \\ &= |f_n(x)|\end{aligned}$$

car pour $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq \frac{x}{2} \leq 1$ et donc $\left(\frac{x}{2}\right)^{3(n+1)} \leq \left(\frac{x}{2}\right)^{3n}$ car $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour $0 \leq u \leq 1$.

Par suite, pour tout $n \geq 0$, $|f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x)|$. D'où $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

On a donc montré que pour tout $x \in [0,2]$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ vérifie le CSSA et par suite converge i.e. $\sum_{n\geq 0} f_n$ CVS sur $[0,2]$ (on le savait déjà d'après 3 b)) et de plus pour tout $x \in [0,2]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$ et donc

$$\forall n \geq 0, \sup_{x\in[0,2]} |R_n(x)| \leq \sup_{x\in[0,2]} |f_{n+1}(x)|. \tag{5}$$

Comme $\sum_{n\geq 0} f_n$ CVS sur $[0,2]$, montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ CVU sur $[0,2]$ revient à montrer que la suite de fonctions reste $(R_n)_n$ CVU vers la fonction nulle sur $[0,2]$. Et donc d'après (5), il suffit de montrer que $(f_n)_n$ CVU vers la fonction nulle sur $[0,2]$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,2]} \frac{x^{3n}}{(n+1)8^{n+1}} = \frac{8^n}{(n+1)8^{n+1}} = \frac{1}{8(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

où on a utilisé le fait que $x \mapsto x^{3n}$ est croissante sur $[0,2]$.

D'où $(f_n)_n$ CVU vers la fonction nulle sur $[0,2]$ et donc, d'après (5), $(R_n)_n$ CVU vers la fonction nulle sur $[0,2]$.

Par suite $\sum_{n\geq 0} f_n$ CVU sur $[0,2]$.

On a alors

i) pour tout $n \geq 0$, f_n continue sur $[0,2]$ (car polynomiale),

ii) la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ CVU sur $[0,2]$.

Par suite, d'après le théorème de continuité de la fonction somme d'une série de fonctions, S est continue sur $[0,2]$ et donc en particulier en 2.

Conclusion : On en déduit S est continue sur $]-2,2[\cup\{2\}=]-2,2]=\mathcal{D}$.

5. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} &= 8\,S(2)\\
&= 8\lim_{x\to 2^-} S(x)\\
&= 8\lim_{x\to 2^-} f(x)\\
&= 8\lim_{x\to 2}\frac{\ln(8+x^3)-\ln 8}{x^3}\\
&= \ln 16-\ln 8\\
&= \ln 2+\ln 8-\ln 8\\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la 2ème égalité le fait que S est continue en 2, dans la 3ème égalité le fait que $S=f$ sur $]-2,2[$ et dans l'avant dernière égalité le fait que $\ln(16)=\ln(2\times 8)=\ln 2+\ln 8$.

Correction de l'exercice 3 :

1. Soit
$$\begin{array}{lcccc} f & : & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\\ & & (t,x) & \mapsto & \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1}\end{array}$$

   On a :

   i) $\forall x\geq 0$, la fonction $f(.,x)\ : t\mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ car exp, $t\mapsto t^2+1$ sont continues sur $\mathbb{R}$, $u\mapsto \frac{1}{u}$ sur $\mathbb{R}^*$ avec ici $t^2+1\neq 0$ pour tout $t\geq 0$.

   ii) $\forall t\geq 0$, la fonction $f(t,.)\ : x\mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ car exp est continue sur $\mathbb{R}$,

   iii) $\forall x\geq 0$,
   $$\forall t\geq 0,\quad |f(t,x)|=\frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1}\leq\frac{1}{t^2+1}=\varphi(t),$$
   donc
   $$\forall x\geq 0,\ |f(.,x)|\leq\varphi\ \text{ sur }\ \mathbb{R}^+$$
   avec
   φ continue sur $\mathbb{R}^+$ (car quotiernt de fonction polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas) et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. En effet,
   $$0\leq\int_0^{+\infty}\varphi(t)dt=[\arctan t]_{t=0}^{t\to+\infty}=\frac{\pi}{2}<+\infty.$$

   Par suite, d'après le Théorème de continuité des intégrales à paramètres, F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrons que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. On a

   i) $\forall x\geq 0$, la fonction $f(.,x)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ d'après 1. i) et iii),

   ii) $\forall t\geq 0$, la fonction $f(t,.) : x\mapsto\frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ car exp l'est sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x\geq 0,\ \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)=-\frac{t^2+1}{t^2+1}e^{-(t^2+1)x}=-e^{-(t^2+1)x}$.

   iii) $\forall x\geq 0$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(.,x) : t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)=-e^{-(t^2+1)x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ car exp, $t\mapsto t^2+1$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

iv) Soit $a > 0$.

On a $\forall x > a$,

$$\forall t \geq 0, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = e^{-(t^2+1)x} \leq e^{-(t^2+1)a} = \Psi_a(t),$$

donc $\forall x > a$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(.,x)\right| \leq \Psi_a$ sur $\mathbb{R}^+$ avec Ψ_a continue sur $\mathbb{R}^+$ (même justification que dans iii)) et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

En effet, comme Ψ_a est continue sur $\mathbb{R}^+$, elle est intégrable sur tout segment $[0,b] \subset \mathbb{R}^+$, reste le problème au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$,

$$0 \leq \Psi_a(t) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2}) \tag{6}$$

car $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\Psi_a(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^2}{e^{(t^2+1)a}} = 0$ par croissance comparée.

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, intégrale de Riemann convergente au voisinage de $+\infty$ car $\alpha = 2 > 1$, on déduit de (6) que Ψ_a est intégrable au voisinage de $+\infty$.

D'où Ψ_a est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Par suite, d'après le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, F est de classe C^1 sur $]a,+\infty[$, $\forall a > 0$ donc C^1 sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\forall x \geq 0, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt = \int_0^{+\infty} -e^{-(t^2+1)x}\,dt = -e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-t^2x}\,dt.$$

3. a) $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt = [\arctan t]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

b) Existence et calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ qui tend vers $+\infty$.

Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcccc} f_n := f(.,x_n) & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{e^{-(t^2+1)x_n}}{t^2+1}. \end{array}$$

On a

i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = f(.,x_n)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ d'après 1.i),

ii) Convergence simple de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $t_0 \geq 0$.

$$f_n(t_0) = \frac{e^{-(t_0^2+1)x_n}}{t_0^2+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Par suite, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers $h = 0$ sur $\mathbb{R}^+$ avec h continue sur $\mathbb{R}^+$ (car constante),

iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$\forall t \geq 0$, $|f_n(t)| = \frac{e^{-(t^2+1)x_n}}{t^2+1} \leq \frac{1}{t^2+1} = \varphi(t)$ et donc

$$\forall n,\ |f_n| \leq \varphi \quad \text{sur } \mathbb{R}^+$$

avec la fonction φ continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, voir 1.iii).

Par suite, d'après le Théorème de convergence dominée, (les f_n et h sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et) on a

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} h(t)dt = 0.$$

Conclusion : On a donc montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = 0$ pour tout suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ tel que $\lim\limits_{n} x_n = +\infty$.

Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

4. Montrons que $\forall x > 0, \quad F'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\ du.$

   D'après 2),
$$\forall x \geq 0, \quad F'(x) = -e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x}\, dt.$$
   Posons $u = \sqrt{x}t$. On a $du = \sqrt{x}dt,\ t = 0 \Longleftrightarrow u = 0,\ t \to +\infty \Longleftrightarrow u \to +\infty$.

   On a alors,
$$\forall x \geq 0, \quad F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du.$$

5. Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F'(x)\ dx = -2\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du\right)^2$.

   On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} F'(x)\ dx = -\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du\right)\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\ dx\right)$.

   Pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\ dx$, posons $u = \sqrt{x}$. On a $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ $(dx = 2udu)$, $x \to 0 \Longleftrightarrow u \to 0$, $x \to +\infty \Longleftrightarrow u \to +\infty$ et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\ dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du$ et par suite,
$$\int_0^{+\infty} F'(x)\ dx = -2\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du\right) = -2\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du\right)^2.$$

6. En déduire que $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   D'après 5),
$$\int_0^{+\infty} F'(x)\ dx = -2\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du\right)^2 = -2I^2. \tag{7}$$
   D'autre part,
$$\int_0^{+\infty} F'(x)\ dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0). \tag{8}$$
   Par suite, (7), (8) et ls question 3) nous donnent $0 - \frac{\pi}{2} = -2I^2$ i.e. $I^2 = \frac{\pi}{4}$.

   Comme $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ du \geq 0$ car pour tout $t \geq 0$, $e^{-t^2} \geq 0$, on en déduit que
$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Correction de l'exercice 4 : Soit $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad 1 \leq x \leq 3,\ y \geq 2;\ x + y \leq 5\right\}$.

Calculons $I := \displaystyle\iint_T \frac{1}{(x+y)^3}\ dxdy$.

Soit
$$\begin{array}{rccc} f & : & T & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \frac{1}{(x+y)^3}. \end{array}$$
La fonction f est continue sur T car quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur T car $x > 0$, $y > 0$.

D'autre part, T est une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$ car
$$\begin{aligned} T &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad 1 \leq x \leq 3,\ \varphi_1(x) = 2 \leq y \leq 5 - x = \varphi_2(x)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad 2 \leq y \leq 4,\ \Psi_1(y) = 1 \leq x \leq 5 - y = \Psi_2(y)\right\} \end{aligned}$$
avec φ_1, φ_2 continues sur $[1, 3]$, Ψ_1 et Ψ_2 continues sur $[2, 4]$.

Par suite, d'après le Théorème de Fubini (généralisé aux parties élémentaires de $\mathbb{R}^2$), on a

1ère façon :

En intégrant par tranches verticales,

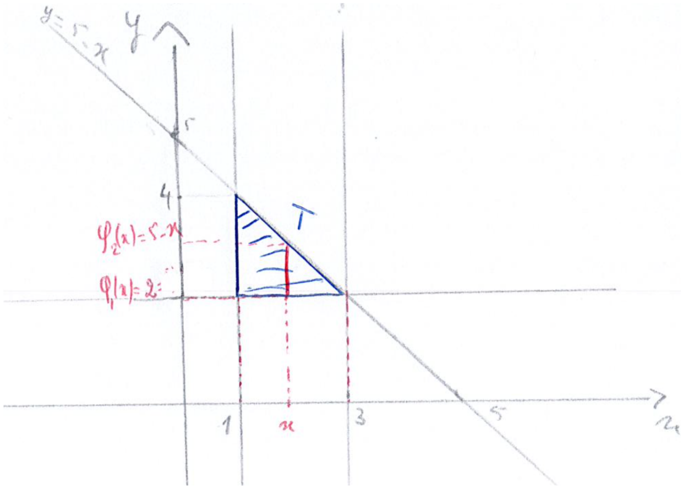

FIGURE 1 – Intégration par tranches verticales

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^3 \left(\int_2^{5-x} \frac{1}{(x+y)^3}\, dy \right) dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_1^3 \left[\frac{1}{(x+y)^2} \right]_{y=2}^{y=5-x} dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_1^3 \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{(x+2)^2} \right) dx \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{25}x + \frac{1}{x+2} \right]_{x=1}^{x=3} \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{25} + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{3} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{6+15-25}{75} \\
&= \frac{2}{75},
\end{aligned}
$$

2ème façon :

En intégrant par tranches horizontales,

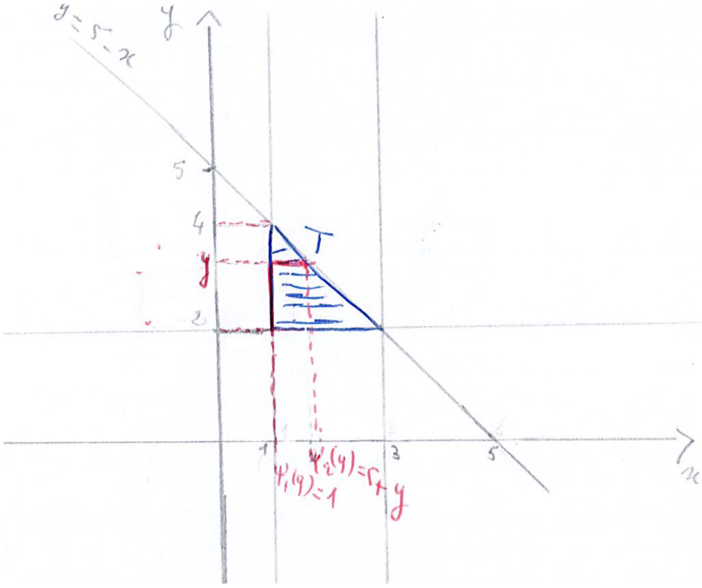

FIGURE 2 – Intégration par tranches horizontales

$$
\begin{aligned}
I &= \int_2^4 \left(\int_1^{5+y} \frac{1}{(x+y)^3}\, dx \right) dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_2^4 \left[\frac{1}{(x+y)^2} \right]_{x=1}^{x=5-y} dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_2^4 \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{(1+y)^2} \right) dy \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{25} y + \frac{1}{1+y} \right]_{y=2}^{y=4} \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{4}{25} + \frac{1}{5} - \frac{2}{25} - \frac{1}{3} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{6+15-25}{75} \\
&= \frac{2}{75}.
\end{aligned}
$$

Correction de l'exercice 5 : Soit $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 3 \text{ et } y \geq 0 \right\}$.

1. Dessin de D.
2. En passant en coordonnées polaires, calculer l'aire de D.

   On a
   $$D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta);\, 0 \leq \theta \leq \pi,\, \frac{1}{2} \leq r \leq \sqrt{3}\},$$

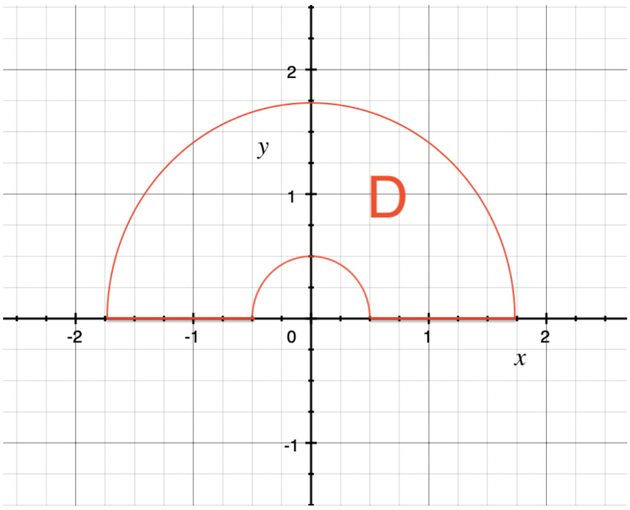

FIGURE 3 – Dessin D

On a alors, d'après le cours, par passage en coordonnées polaires et Fubini,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}(D) &:= \iint_D dx\,dy \\
&= \int_0^{\pi} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}} r dr \right) d\theta \\
&= \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=\frac{1}{2}}^{r=\sqrt{3}} \times [\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\
&= \pi(\frac{3}{2} - \frac{1}{8}) \\
&= \frac{11}{8}\pi.
\end{aligned}$$

3. Vérifier le résultat obtenu dans 2. avec la formule d'aire d'un disque centré en $a \in \mathbb{R}^2$ de rayon $r > 0$.

   On a

$$D = \left(\overline{D(0, \sqrt{3})} \setminus D(0, \frac{1}{2}) \right) \cap \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y \geq 0 \right\}.$$

   Par suite, comme pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, pour tout $r > 0$, $\mathrm{Aire}(\overline{D(a, r)}) = \mathrm{Aire}(D(a, r)) = \pi r^2$, on a alors

$$\mathrm{Aire}(D) = \frac{1}{2} \left(\mathrm{Aire}(\overline{D(0, \sqrt{3})}) - \mathrm{Aire}(D(0, \frac{1}{2})) \right) = \frac{1}{2}\pi(3 - \frac{1}{4}) = \frac{11}{8}\pi.$$